Jerzy PODGÓRSKI

WPŁYW WARUNKU STANU GRANICZNEGO NA KIERUNEK PROPAGACJI RYSY W MATERIALE SPRĘŻYSTO-KRUCHYM

INFLUENCE OF THE LIMIT STATE CRITERION ON DIRECTION OF THE CRACK PROPAGATION IN THE ELASTIC-BRITTLE MATERIAL

W pracy analizowany jest wpływ kilku typów warunków zniszczenia na kierunek i kształt szczeliny powstałej w materiale sprężysto-kruchym w wyniku działania obciążenia ścinającego i rozciągającego. Zastosowano Metodę Elementów Skończonych w analizie naprężeń, oraz metodę traconych elementów do modelowania propagacji szczeliny. Analizowanymi warunkami są warunki Hubera-Misesa, Druckera-Pragera oraz kryterium PJ[1], których użyto do opisu materiału o charakterystyce zbliżonej do betonu.

Influence of three different types of the failure conditions on the shape and direction of the crack propagation in the elastic-brittle material is presented. Finite Elements Method and death element procedure is used to modeling and analysis of the crack propagation. Huber-Mises, Drucker-Prager and author (PJ) failure criterion [1] are applied to the concrete-like material.

1. Wstęp

Problem powstawania i propagacji szczelin w materiałach kruchych, ze względu na duże znaczenie praktyczne, analizowany był różnymi metodami przez wielu badaczy w ostatnim dwudziestoleciu. Stosowane były zarówno metody analityczne jak też numeryczne w tym Metoda Elementów Skończonych (MES) oraz Metoda Elementów Brzegowych. Zgodność wyników analizy z eksperymentem, jaką można uzyskać przy zastosowaniu MES oraz łatwość modelowania złożonych problemów brzegowych przyczyniła się do popularności tej metody zarówno wśród badaczy jak i inżynierów zajmujących się praktycznym projektowaniem.

Kształt i gęstość siatki elementów skończonych stosowanych w analizie propagacji szczelin ma znaczny wpływ na jakość rozwiązania jak i na otrzymywane z obliczeń wartości obciążeń krytycznych. W precyzyjnych analizach stosuje się zmienną gęstość siatki wraz z prognozowaniem kierunku propagacji szczeliny, co znacznie utrudnia i komplikuje obliczenia. Metoda ze zmienną siatką stosowana była z powodzeniem w analizie szczeliny powstającej w czasie skrawania skał, które były przedmiotem wcześniejszych prac [2, 3] z udziałem autora. Istnieje też prosta, bardzo wydajna metoda analizy szczelin polegająca na usuwaniu w każdym kroku obliczeń jednego elementu, w którym obserwujemy największą wartość wytężenia. Metoda ta nosi nazwę metody elementów traconych. Metodą tą analizowano propagację szczeliny w ścinanej próbce CT w pracy Niezgodzińskiego, Kubika i Młotkowskiego [4]. Wadą tej metody jest wymóg użycia w obliczeniach modelu MES ze znacznie gęstszą siatką elementów niż w metodach ze zmienną siatką.

W prezentowanej pracy zastosowano metodę traconych elementów w analizie zadania o charakterze zbliżonym do zagadnień występujących w mechanice skrawania skał oraz w mechanice betonu. Przedmiotem analizy jest wpływ warunku stanu granicznego na kierunek propagacji rysy oraz wartości obciążeń krytycznych wywołujących propagację szczeliny.

2. Warunki stanu granicznego

Do analizy wybrano trzy warunki stanu granicznego:

- warunek *PJ*, zaproponowany przez autora [1] , który zakłada zależność wytężenia materiału od trzech niezmienników tensora naprężenia,
- warunek Druckera-Pragera, w którym wytężenie zależy od dwóch niezmienników (I_1, J_2) tensora naprężenia,
- warunek Hubera-Misesa, w którym miarą wytężenia jest wartość drugiego niezmiennika (J_2), dewiatora naprężenia.

2.1. Warunek *PJ*

Warunek *PJ* został zaproponowany w formie wyrażającej zależność trzech alternatywnych niezmienników ($\acute{o}_0$, $\hat{o}_0$, J) tensora naprężenia:

$$\sigma_0 - C_0 + C_1 P(J)\tau_0 + C_2\tau_0^2 = 0 \qquad (1)$$

gdzie: $P(J) = \cos\left(\frac{1}{3}\arccos(\alpha J) - \beta\right)$

jest funkcją określającą kształt przekroju powierzchni granicznej,

$$\sigma_0 = \tfrac{1}{3} I_1, \quad \tau_0 = \sqrt{\tfrac{2}{3} J_2}, \quad J = \frac{3\sqrt{3}\, J_3}{2\, J_2^{3/2}}$$

I_1 - jest pierwszym niezmiennikiem tensora naprężenia, J_2, J_3 - niezmiennikami dewiatora naprężenia, α, β, C_0, C_1, C_2 - stałymi zależnymi od materiału.

Szczególnymi przypadkami warunku (1) są klasyczne kryteria Hubera-Misesa, Tresca'i, Coulomba-Mohra, Druckera-Pragera oraz inne [5].

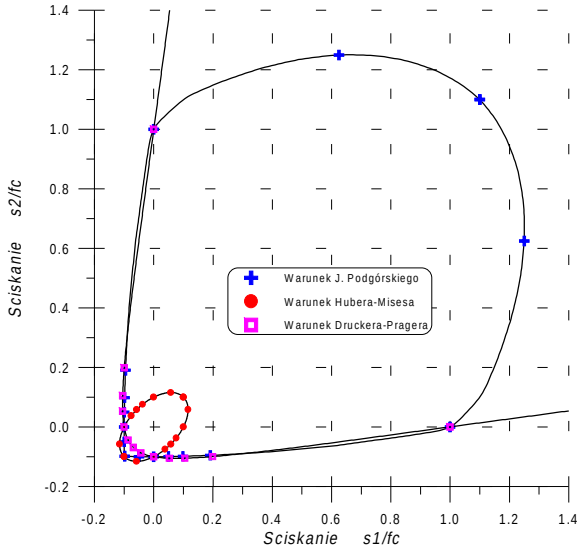
Stałe występujące w równaniu (1) określić można na podstawie takich cech materiału jak wytrzymałość na ściskanie f_c, wytrzymałość na rozciąganie f_t w jednoosiowych stanach naprężenia, wytrzymałość na ściskanie f_{cc} oraz f_{0c} w płaskim stanie naprężenia przy σ_1/σ_2 równym odpowiednio 1/1 oraz 2/1. Piątą wartością niezbędną do wyznaczenia stałych może być wytrzymałość na rozciąganie w stanie trójosiowym $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$ =1/1/1, f_{vt}, którą zgodnie z hipotezą R. M. Haythornthwaite'a (tension cutoff) przyjmujemy równą f_t. Materiał o właściwościach zbliżonych do betonu można opisać przyjmując stałe f_{cc}=1,1 f_c , f_{0c}=1,25 f_c .

2.2. Warunek Druckera – Pragera

Korzystając z oznaczeń zastosowanych w równaniu (1) warunek Druckera – Pragera zapiszemy następująco:

$$\sigma_0 - C_0 + C_1\tau_0 = 0 \qquad (2)$$

Dwie stałe występujące w tym równaniu wyliczamy na podstawie zadanych wartości f_t oraz f_c.



Rys. 1. Krzywe graniczne w płaskim stanie naprężenia

2.3. Warunek Hubera – Misesa

Kryterium zaproponowane przez T. Hubera i R. von Misesa można również otrzymać przez uproszczenie równania (1):

$$\tau_0 - C_0 = 0 \tag{3}$$

Stałą C_0, dobierzemy tak, aby materiał wykazywał zgodną z eksperymentem wytrzymałość na rozciąganie, f_t.

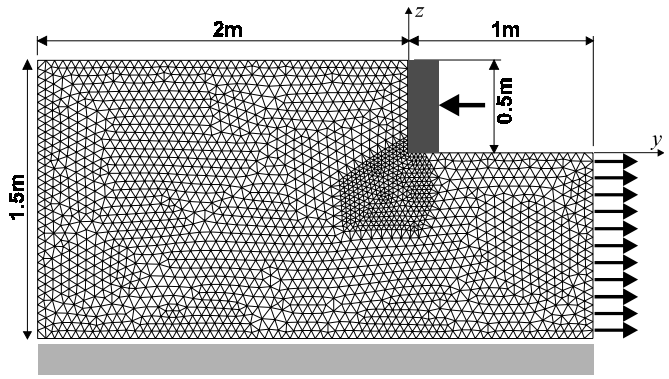
Krzywe graniczne w płaskim stanie naprężenia wyznaczone na podstawie (1) dla wymienionych warunków pokazano na rys. 1.

3. Parametry modelu i metoda analizy

Parametry geometryczne modelu, który będzie przedmiotem analizy podane zostały na rys. 2. Charakterystyki materiałowe odpowiadają betonowi o wytrzymałości na ściskanie f_c=20MPa, f_{cc}=22MPa, f_{0c}=25MPa, oraz wytrzymałości na rozciąganie f_t=2MPa. Moduł Younga E=32.4GPa, współczynnik Poissona ν=0,167.

Przyjęto następujące warunki brzegowe:

$z = -1 \quad \rightarrow \quad u_z = 0,$
$y = 0 \quad \rightarrow \quad u_y = 0,$
$y = 1 \quad \rightarrow \quad \sigma_y = p,$



Rys. 2. Parametry geometryczne modelu. Siatka 2079 węzłów

gdzie p oznacza stałe naprężenia rozciągając. Pozostałe brzegi są wolne od naprężeń.

Przyjęto następującą procedurę analizy procesu pękania:

1. wyznaczenie naprężeń od jednostkowego obciążenia *p;*
2. wyszukanie elementu modelu, w którym wartość wytężenia wg przyjętego kryterium osiąga wartość największą;
3. wyznaczenie wartości obciążenia *p*, przy której spełnione wytężenie w wybranym elemencie osiąga wartość krytyczną;
4. usunięcie wybranego elementu.

Po zakończeniu tego cyklu następuje powrót do etapu 1. Analizę przerywa się po przebiegu zadanej liczby kroków lub w przypadku zniszczenia modelu. Zarejestrowane wartości obciążenia krytycznego wraz z przemieszczeniem wybranego punktu modelu zapisywane są do dalszej analizy.

Obliczenia przeprowadzono przy użyciu modułu SSAP0 systemu Algor oraz własnego oprogramowania, którego zadaniem było sprawdzanie wytężenia, usuwanie „zniszczonych" elementów rejestracja wartości obciążeń krytycznych.

4. Analiza propagacji rys

Z wielu analiz propagacji rysy przy zmieniających się kryteriach zniszczenia oraz różnych gęstościach siatek elementów zaprezentowane zostaną cztery wybrane przykłady:

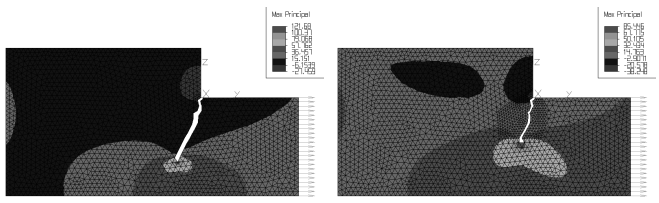
- kryterium *PJ*, siatka 1844 węzłów,
- kryterium *PJ*, siatka 2079 węzłów,
- kryterium Druckera-Pragera, siatka 2079 węzłów,
- kryterium Hubera-Misesa, siatka 2079 węzłów.

Wyniki analiz w postaci map naprężeń na siatkach z usuniętymi w trakcie obliczeń elementami przedstawiają rysunki: 3, 4. Wykresy ukazane na rysunkach 5, 6 obrazują zmianę obciążenia krytycznego w trakcie propagacji rysy.

Na osiach tych występują bezwymiarowe wartości obciążeń i przemieszczeń odniesione do wartości umownych P_0, U_0 określonych następująco:

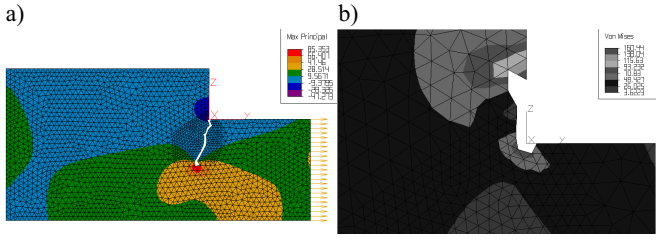
$P_0 = f_t\,1\text{m}^2$ – jest nominalną wytrzymałością na rozciąganie modelu,
$U_0 = 1\text{m}\ \ f_t / \text{E}$ – jest umownym przemieszczeniem brzegu obciążonego.

a) b)



Rys. 3. Kształt rysy oraz maksymalne naprężenia główne, kryterium PJ*, a - model 1849 węzłów, 30 krok obliczeń, b – model 2079 węzłów, 35 krok obliczeń,*

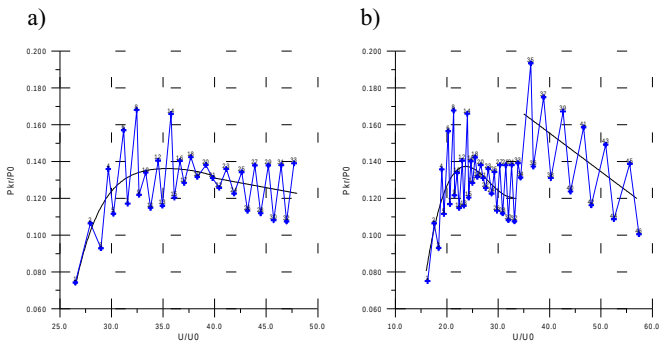
a) b)



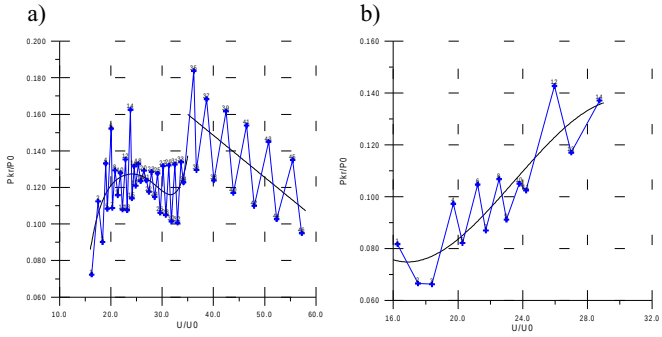
Rys. 4. Kształt rysy oraz naprężenia, model 2079 węzłów, a –kryterium Druckera-Pragera, 35krok obliczeń, maksymalne naprężenia główne, b – kryterium Hubera-Misesa, 15 krok obliczeń, naprężenia zredukowane

Porównując prezentowane wyniki obliczeń można stwierdzić, że zarówno kształt rysy jak i wartości obciążeń krytycznych obserwowane w przypadku kryterium *JP* oraz Druckera-Pragera są bardzo zbliżone. Jest to wynikiem porównywalnych oszacowań obciążeń krytycznych w obszarze naprężeń ścinających (por. rys. 1). Kryterium Hubera-Misea daje wyniki znacznie różniące się od dwóch pozostałych. Kształt strefy zniszczenia (rys. 4) jest wynikiem przekroczenia dopuszczalnych wytężeń w obszarze naprężeń ściskających, gdzie dwa pozostałe kryteria wykazują duże zapasy wartości dopuszczalnych.

Krytyczne wartości obciążeń są wyraźnie zależne od gęstości i przebiegu siatki elementów (rys. 5). Mniej gęsta siatka powoduje wzrost wartości sił krytycznych, co szczególnie zaznacza się w punktach przejścia rysy z obszaru o gęstszej siatce do obszaru rzadziej zdyskretyzowanego (krok nr 35 na wykresie 5b i 6a).



Rys. 5. Obciążenie niszczące, kryterium PJ, *a - model 1849 węzłów, b - model 2079 węzłów. Numery wierzchołków łamanej oznaczają kolejne kroki obliczeń*



Rys. 6. Obciążenie niszczące, model 2079 węzłów, a- kryterium Druckera-Pragera, b- kryterium Hubera-Misesa. Numery wierzchołków łamanej oznaczają kolejne kroki obliczeń

5. Wnioski

Analiza przeprowadzona w pracy wykazuje widoczną zależność rodzaju zastosowanego kryterium stanu granicznego na kształt i kierunek propagacji rys w materiale kruchym. Analogiczne wyniki obserwowane były przez autorów pracy [4] dla innego materiału (epidian). Próbkę CT z epidianu poddano testom laboratoryjnym oraz przeprowadzono numeryczną symulację próby ścinania przy użyciu MES z zastosowaniem warunków Hubera-Misesa oraz Burzyńskiego (analogiczny do warunku Druckera-Pragera).

Problemy analizy szczelin, w których dominują obszary naprężeń ścinających i płaskie stany naprężenia mogą być rozwiązywane dostatecznie dokładnie przy użyciu uproszczonego kryterium Druckera-Pragera zamiast precyzyjnych kryteriów zależnych od trzech niezmienników tensora naprężenia. Wydaje się, że w obszarach dużych ciśnień rozbieżność wyników dla oby typów kryteriów byłaby znaczna.

Na wartości obciążeń krytycznych wyliczanych metodą elementów traconych duży wpływ ma gęstość siatki dyskretyzacyjnej.

6. Literatura

[1] Podgórski J.: *General Failure Criterion for Isotropic Media*. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 111(1985) 2, 188-201.
[2] Podgórski J., Jonak J.: *Zagadnienie pękania w procesach skrawania skał*. Zeszyty Naukowe Polit. Biał. Seria Mechanika, 24(2001).
[3] Jonak J., Podgórski J.: *Inclusion of indirect contact layer*.. Trans. Instn Min. Metall. (Sect. A: Min. technol.), 110(2001), A125-128.
[4] Niezgodziński T., Kubiak T., Młotkowski A.: *Numeryczne modelowanie pękania próbki ścinanej*. Materiały Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji, Augustów, 23 –26 maja 2001, 199-204.
[5] Podgórski J.: *Limit state condition and the dissipation function for isotropic materials*. Archives of Mechanics, 36(1984) 3, 323-342.

****
Niniejszą pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr 8T12A 06421 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych
****