

## ANALIZA POŁĄCZENIA SPAWANEGO ZAPROJEKTOWANEGO METODAMI NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

### ANALYSIS OF WELDED JOINT DESIGNED BY LIMIT ANALYSIS METHODS

Praca przedstawia wyniki kształtowania metodami nośności granicznej oraz przybliżonych analiz sprężystych MES i numerycznych badań zmęczeniowych, spawanego połączenia nakładkowego blach, które wykonane w sposób tradycyjny ma wysoki współczynnik koncentracji naprężenia i niską trwałość zmęczeniową. Na podstawie skonstruowanego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń i kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia określono kształt połączenia, a przede wszystkim oszacowanie teoretyczne szerokość łączenia blach (szerokości spoiny). Z przeprowadzonych analiz wynika, że optymalna – ze względu na wielkość maksymalnej koncentracji i trwałości zmęczeniowej – szerokość spoiny pokrywa się z otrzymanym wymiarem teoretycznym. Połączenie zaprojektowane metodami nośności granicznej ma ponad dwukrotnie mniejszy współczynnik koncentracji naprężenia w stosunku do tradycyjnego i około 50 krotne większą trwałość zmęczeniową.

**Słowa kluczowe:** kształtowanie, nośność graniczna, MES, analizy zmęczeniowe.

The paper presents the results of application of the limit analysis methods, approximate elastic analyses FEM and numerical fatigue investigations to overlapping weldments in sheet-metal plates. When made with the use of traditional methods, these weldments exhibit high concentration of stresses and low fatigue life. By constructing statically admissible stress fields and kinematically admissible collapse mechanisms, one can determine the shape of weldment, and estimate theoretically the weld leg length. The analyses performed by the author show that the weld leg length optimal for minimizing stress concentration and maximizing fatigue strength is consistent with that calculated theoretically. The weldment designed with the use of limit analysis methods has, in comparison with a traditional welded joint, a twofold lower stress concentration factor, and over 50 times higher fatigue life.

**Keywords:** shape design, limit analysis, FEM, fatigue analysis.

#### 1. Wprowadzenie

Procesy zmęczeniowe następują najczęściej w miejscach największych koncentracji naprężenia. Takimi miejscami są zwykle węzły i połączenia konstrukcyjne. W procedurach przewidywania trwałości przyjmuje się, że decyduje o niej stan naprężenia w punkcie najbardziej obciążonym. Zwykle punkt taki leży na powierzchni swobodnej, gdzie mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia, a w szczególnych przypadkach ze stanem jednoosiowym. W takich przypadkach, wartość naprężenia w takim punkcie oblicza się wykorzystując pojęcie współczynnika koncentracji  $K_t$ :

$$\sigma_{max} = \sigma_{nom} \cdot K_t \quad (1)$$

gdzie:  $\sigma_{max}$  - max. naprężenie w miejscu koncentracji;  $\sigma_{nom}$  - naprężenie nominalne (umowne).

Projektowanie elementów i węzłów konstrukcji o maksymalnej trwałości zmęczeniowej jest więc równoważne poszukiwaniu takich kształtów i wymiarów, które dają najmniejszy współczynnik koncentracji.

W pracy podjęto zadanie poszukiwania optymalnych kształtów spawanego złącza nakładkowego blach, które jak wykazuje praktyka inżynierska, przy jego tradycyjnym wykonaniu – na przykład takim jak przedstawiono na rys. 1 - ma niską trwałość zmęczeniową i wysoki współczynnik koncentracji naprężenia  $K_t$ . Na przykład, dla proporcji wymiarów i promieni zaokrągleń jak na rys. 1, maksymalna koncentracja występuje na linii wtopu spoiny, a współczynnik koncentracji obliczony z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) wynosi aż  $K_t=8$ . Na rys. 1 naniesiono rozkład współrzędnej naprężenia

#### 1. Introduction

Fatigue processes usually take place at the regions of high concentration of stresses, such as constructional joints. In the procedures of fatigue life prediction, one assumes that fatigue life is determined by the state of stress at the point where stresses take maximum values. Usually, such a point lies on a free surface, where we deal with a state of plane stress, and in particular cases – with an uniaxial state. In such cases, the stress value at a point can be calculated based on the concept of stress concentration factor  $K_t$ :

$$\sigma_{max} = \sigma_{nom} \cdot K_t \quad (1)$$

where:  $\sigma_{max}$  – maximal stress at concentration point,  $\sigma_{nom}$  – nominal (reference) stress.

The design of structure elements and joints of maximal fatigue life is then equivalent to searching for such shapes and dimensions of the elements and the joints that would ensure minimal stress concentration.

In this study, the author undertakes the quest for optimal shapes of overlapping weldment in sheet-metal plates. As it is known from engineer's practice, when such weldments are made by traditional methods – i.e. such as shown in Fig. 1 – their fatigue life is low, and stress concentration factor  $K_t$  is high.

For example, with dimension proportions and weld toe radii as in Fig. 1, maximal stress concentration appears on the line of weld fusion, and stress concentration factor calculated with the use of finite element method (FEM) is as high as  $K_t=8$ . The distribution of stress coordinate  $\sigma_{xx}$ , drawn in Fig. 1, shows

$\sigma_{xx}$  działających wzdłuż osi  $y$  zawierającej punkt maksymalnej koncentracji.

Optymalny kształt tego złącza określono na podstawie skonstruowanego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń i analiz kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia. Uzasadnienie stosowania takiego podejścia wynika z wniosków z twierdzeń o dolnej i górnej ocenie nośności granicznej, które można streścić następująco [1,9,11]:

*Wniosek 1.* Bezpieczne oszacowanie kształtu i wymiarów projektowanego elementu konstrukcyjnego można otrzymać budując odpowiednie, statycznie dopuszczalne pole naprężeń, zdolne do przeniesienia danego obciążenia zewnętrznego. Powierzchnie konturowe takiego pola określają kształt elementu.

*Wniosek 2.* Kształt i wymiary projektowanego elementu wyznaczone na podstawie odpowiednio dobranego, kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu zniszczenia nie zapewniają, że element będzie zdolny do przeniesienia danego obciążenia. Niemniej, oszacowanie kształtu i wymiarów na podstawie trafnie wybranego mechanizmu zniszczenia jest zawsze wskazane, ponieważ umożliwia ocenienie o ile co najwyżej jest przewymiarowany element otrzymany na podstawie statycznie dopuszczalnego pola naprężenia.

Pole statycznie dopuszczalne to pole, które spełnia równania równowagi wewnątrz, statyczne warunki na brzegu i nie przekracza w żadnym punkcie założonego warunku plastyczności. Pole takie nie spełnia w ogólności żadnych warunków kinematycznych (równań nierozdzielności i kinematycznych warunków brzegowych). Może więc być ciągłe lub nieciągłe.

W pracy operuje się metodą statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń SADSF, [1,9,11], która w chwili obecnej pozwala rozwiązywać zadania kształtowania nawet bardzo złożonych konstrukcji przy danych jedynie warunkach brzegowych [1,2,9,11]. Niestety metoda ta jest jeszcze mało upowszechniona wśród inżynierów.

Typowy przykład sformułowania i rozwiązania podejmowanych w jej ramach zadań ilustruje rys. 2. Danymi są (por. rys. 2a): obciążenie graniczne  $p$  przyłożone na części  $B_p$  brzegu  $B$ , geometria części  $B_p + B_u$  ( $B_u$  - podparta część brzegu) oraz materiał poszukiwanej konstrukcji [1,2]. Należy znaleźć statycznie dopuszczalne pole naprężeń, które spełnia podane warunki brzegowe, w każdym punkcie osiąga najwyższe możliwe naprężenie zredukowane ( $\sigma_{eq}$ ) - równe granicy plastyczności ( $\sigma_y$ ) i którego kontur wyznacza brzegi poszukiwanej konstrukcji (rys. 2b).

W metodzie SADSF zakłada się operowanie kawałkami jednorodnymi polami naprężeń co powoduje, że liniami nieciągłości są odcinki prostych.

Przykład takiej linii  $L^{\alpha,\beta}$ , która rozdziela ona dwa różne sta-

the stresses acting along the axis  $y$ , on which lies the point of maximal concentration.

The basis for determining optimal shape of this weldment was the construction of statically admissible stress field and the analyses of kinematic mechanisms of plastic collapse. The justification of such an approach is based on the conclusions following from the lower-bond and the upper-bond theorems of limit analysis, which can be abbreviated as follows [1,9,11]:

*Conclusion 1.* Safe estimation of shape and dimensions of the designed constructional element can be done by creating an adequate, statically admissible stress field, capable of carrying the given external load. The contour surfaces of such a field determine the shape of element.

*Conclusion 2.* Shape and dimensions of the designed element, determined on the basis of an adequately chosen, kinematically admissible mechanism of plastic collapse, does not give any guarantee that the element is capable of carrying the assumed load. However, estimation of its shape and dimensions on the basis of an appropriately chosen collapse mechanism is always recommended, because it allows for evaluating how much oversized is the element designed on the basis of statically admissible stress field.

Statically admissible field is the one which satisfies equilibrium equations within the field, static conditions on the boundaries, and which does not exceed the assumed yield condition at any point. In general, such a field does not satisfy any kinematic conditions (compatibility conditions and kinematic boundary conditions). Therefore, it can be either continuous or discontinuous.

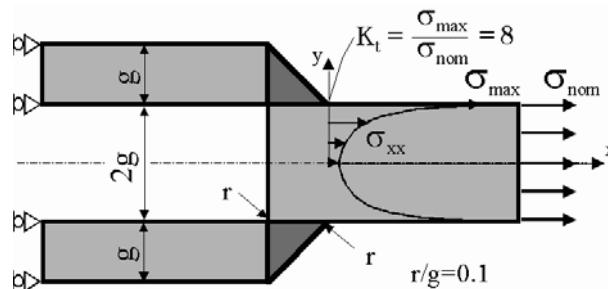
In this work, we make use of the method of statically admissible discontinuous stress

fields SADSF, [1,9,11]. At the present stage of development, the method allows for solving the problems of shaping of structures, even very complex ones, for which only boundary conditions are given [1,2,9,11]. Unfortunately, this method has not been well popularized among mechanical engineers yet.

Fig. 2 illustrates a typical example of formulating and solving problems considered in this study. The data include (see Fig. 2a): limit load  $p$  applied to part  $B_p$  of boundary  $B$ , geometry of part  $B_p + B_u$  ( $B_u$  - supported part of the boundary), and the material of the structure we seek for [1,2]. One should find a statically admissible stress field, which satisfies the assumed boundary conditions, ensuring that in any of its points the reference stress ( $\sigma_{eq}$ ) takes a maximum value equal to the yield point ( $\sigma_y$ ). The contour of the field determines the boundaries of the sought-after structure (Fig. 2b).

In the SADSF method, one assumes that the stress fields we operate on consist of homogeneous parts, in result of which the discontinuity lines are segments of straight lines.

An example of such a line  $L^{\alpha,\beta}$ , which separates two differ-



Rys. 1. Schemat konstrukcyjny analizowanego w pracy połączenia nakładkowego blach

Fig. 1. Generic geometry of the overlap joint

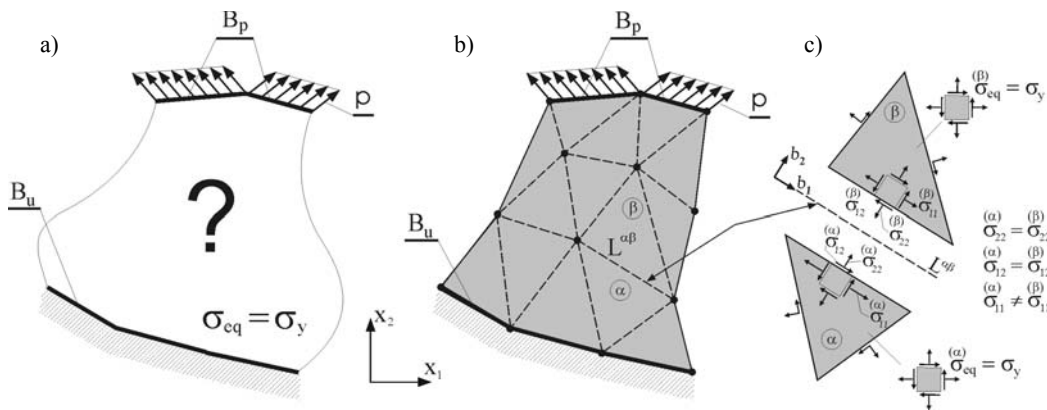
ny naprężenia  $s_{ij}^{(a)}$  i  $s_{ij}^{(b)}$  w obszarach 'α' i 'β', przedstawiono na rys. 2c. Spełnienie równań równowagi na tej linii wymaga aby współrzędne  $s_{22}^{(a)}$ ,  $s_{22}^{(b)}$  oraz  $s_{12}^{(a)}$  i  $s_{12}^{(b)}$  były równe. Mogą się różnić tylko współrzędne  $s_{11}^{(a)}$  i  $s_{11}^{(b)}$  (gdyby były równe to stany naprężenia w obu obszarach byłyby jednakowe).

W praktyce rozwiązanie zadania z rys. 1a jest konstruowane poprzez łączenie gotowych rozwiązań szczególnych, które w istniejącym oprogramowaniu metody jest zestawiane w formie bibliotek [1,2,5]. Projektant nie musi rozwiązywać żadnego układu linii nieciągłości naprężeń. Wystarczy, że dobierze i połączy (jak klocki) - z zachowaniem warunków równości wzajemnych oddziaływań na krawędziach łączenia - gotowe rozwiązania biblioteczne. Obecnie można w ten sposób konstruować nawet ustroje bardzo złożone [1,2].

Pole kinematycznie dopuszczalne to pole, które zachowu-

ent states of stress  $s_{ij}^{(a)}$  and  $s_{ij}^{(b)}$  in regions 'α' and 'β' is shown in Fig. 2c. The condition necessary for satisfying equilibrium equations on this line requires the coordinates  $s_{22}^{(a)}$ ,  $s_{22}^{(b)}$  and  $s_{12}^{(a)}$ ,  $s_{12}^{(b)}$  be equal. Only the coordinates  $s_{11}^{(a)}$  and  $s_{11}^{(b)}$  can differ (if these were equal, the states of stress in both regions would be identical, as well).

In practice, the solution to the problem of Fig. 1a is constructed by assembling ready-made solutions, which are collected in the form of libraries in the existing software of the method [1,2,5]. The designer does not need to solve any system of stress discontinuity lines. It is enough to select and assembly (like the Lego blocks) the available library solutions, while preserving the conditions of equality of mutual reactions on the connection boundaries. Nowadays, it is possible to construct in that way even very complicated structures [1,2].



Rys.2. Poglądowa ilustracja sformułowania oraz rozwiązania zadania metodą SADSF  
Fig. 2. Formulation and solution of the SADSF problem

je ciągłość odkształcającego się plastycznie ośrodka, spełnia kinematyczne warunki brzegowe i warunek dodatniości mocy dyssypowanej.

W pracy rozważono proste kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia analizowanego złącza i na tej podstawie znaleziono jego kształt i wymiary. Kształt ten okazał się bardzo zbliżony do otrzymanego z SADSF. Warto tu zwrócić uwagę, że inżynierskie obliczenia spoin są uzasadnione z twierdzenia o górnym oszacowaniu nośności granicznej - zakłada się zniszczenie spoin poprzez ich ścinanie.

Pewnym ograniczeniem stosowanych w pracy metod jest między innymi to, że operują one dalekim od rzeczywistości, uproszczonym sztywno-idealnie plastycznym modelem materiału i analizują jedynie stan graniczny konstrukcji odpowiadający początkowi rozwijania się dużych odkształceń plastycznych. Dlatego przydatność otrzymanych z ich wykorzystaniem rozwiązań powinna być potwierdzona na drodze numerycznej lub doświadczalnej.

Wyniki dotychczas przeprowadzonych badań rzeczywistych własności zaprojektowanych w ten sposób elementów wykazują ich dobre, a niekiedy bardzo dobre własności nośne [1,3,6,7,9-12]. W szczególności w ukształtowanych SADSF elementach stwierdzano m.in. zachowywanie małych deformacji w zakresie obciążeń eksploatacyjnych i prawie totalne niszczenie się przy obciążeniach granicznych, a także dobre wyrównane pola wyężenia w zakresie sprężystym i niskie kon-

The kinematically admissible field is the one which preserves continuity of the plastically deformed medium, satisfies kinematic boundary conditions, and which is characterized by non-negative dissipated power.

In this work, we consider simple, kinematically admissible collapse mechanisms of the analysed joint, and on that basis we will find its shape and dimensions. It turns out that this shape is very similar to that obtained when using the SADSF method. It is worth mentioning that engineer's calculations of weldments are validated by the upper-bond limit theorems – where one assumes destruction of the weld due to shearing.

A certain limitation of the methods used in this work is, among other things, that they operate on a simplified, rigid ideally-plastic model of the material, which is far from reality. The methods analyse only the limit state of the structure associated with the beginning of development of large plastic deformations. For this reason, the usefulness of solutions obtained by using the methods should be verified by numerical or experimental investigations.

The results of examinations of actual properties of elements designed with the use of the described methods show that they have good, and sometimes even very good load capacity [1,3,6,7,9-12]. In particular, it was found that the elements shaped by using the SADSF method are characterised by, among other things, small strains in the range of working loads, well-equalised effort field in elastic range, low concentration of strains, and that

centracje deformacji.

Takich też własności oczekiwano dla projektowanego złącza, a ponadto dużej wytrzymałości przy obciążeniach zmiennych w czasie.

## 2. Kształtowanie połączenia nakładkowego metodą SADSF

Poglądowe sformułowanie oraz rozwiązanie zadania kształtowania analizowanego złącza otrzymane w ramach metody SADSF przedstawiono na rys. 3.

Danymi są tutaj (por. rys. 3a): obciążenie graniczne  $p$  przyłożone na brzegu  $B_p$ , geometria tej części brzegu  $B_p$  (wymiary:  $L, g$ ) oraz materiał poszukiwanego złącza.

Jak widać założono szczególną sytuację, tj. że grubość blachy środkowej jest równa dwóm grubościom blach zewnętrznych. Pozwoliło to przyjąć jednakowe obciążenie graniczne  $p = \sigma_y$  na brzegach  $B_p$  ( $\sigma_y$  - granica plastyczności materiału połączenia). Przyjęto także jednakowe własności plastyczne materiałów blach oraz spoin.

Tak postawione zadanie ma wiele rozwiązań. Nie jest to jednak wadą metody, pozwala bowiem na konstrukcję kilku rozwiązań i wybrania spośród nich tego, które spełnia dodatkowe kryteria wynikające np. z kosztów wykonania, trwałości zmęczeniowej itd.

Szkic jednego z otrzymanych pól, które daje kształty najbliższe do połączenia tradycyjnego przedstawiono na rys. 3b. Otrzymano je z wykorzystaniem programu RHM [5] poprzez połączenie gotowych rozwiązań bibliotecznych spełniających w każdym obszarze jednorodnym warunek Hubera-Misesa. Jak widać na rys. 3c w konstrukcji rozwiązania wykorzystano zaledwie dwa pola mające oznaczenia biblioteczne 's26x' i 'Ns'. Pola te w powiększeniu pokazano na rys. 3d. Pole 'Ns' realizuje jednoosiowe rozciąganie naprężeniami równymi granicy plastyczności  $\sigma_y$ . Stan naprężenia w polu 's26x' jest bardziej złożony i nie będzie tutaj omawiany.

Rozwiązanie przedstawione na rys. 3b w pełni określa kształt i wymiary projektowanego złącza. Otrzymano tu między innymi kąt nachylenia spoiny  $55^\circ$  oraz szerokość łączenia blach (szerokość spoiny)  $b = 2.12g$ .

Wymiary te uzyskane przy założeniu dolnej oceny nośności granicznej złącza, stanowią górną ocenę rzeczywistych wymiarów połączenia. Ich ocena dolna zostanie wyznaczona z analiz kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia.

## 3. Analizy kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia

Analizowano proste kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia, które przedstawiono na rys. 4a. Mechanizmy te polegają na ruchu sztywnych bloków przedzielonych krawędziami nieciągłości prędkości, które zaznaczono liniami grubymi

an almost total destruction takes place at limit loads.

One expects that the designed weldment would have similar properties, and, additionally, high fatigue life under time-variable loads.

## 2. Shaping overlapping weldment by SADSF method

Fig. 3 illustrates formulation of the problem of how to shape the analysed joint, and presents solution to this problem obtained by applying the SADSF method.

Here, the data are (see Fig. 3a): limit load  $p$  applied to the boundary  $B_p$ , geometry of this part of boundary  $B_p$  (dimensions  $L, g$ ), and material of the designed joint.

As it can be seen in Fig. 3a, one assumes a particular case, when the thickness of the central plate is twice greater than thicknesses of outer plates. It allows for assuming equal limit loads,  $p = \sigma_y$  on the boundaries  $B_p$  ( $\sigma_y$  - yield point of the joint material). One also assumes identical plastic properties of materials of the plates and welds.

There are many solutions to the problem formulated in this way. Nevertheless, this is not a disadvantage of the method, because it makes it possible to construct several solutions, and to choose the one which satisfies additional criteria - concerning, for example, production costs, fatigue life, etc.

Fig. 3b presents a sketch of some of the obtained fields, the

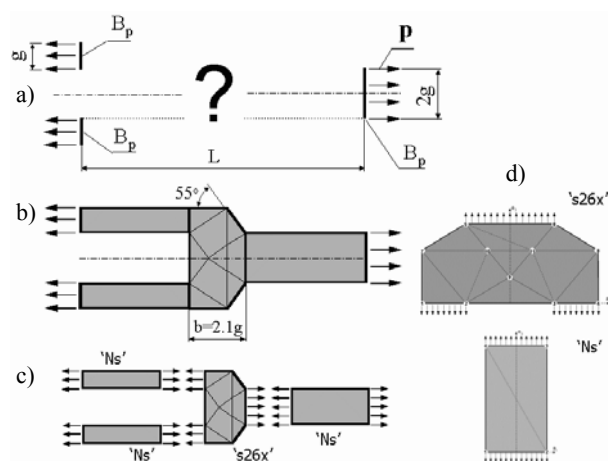
ones which provide shapes closest to a traditional weldment. The fields were calculated with the use of the RHM software [5] by assembling the available library solutions which satisfy the Huber-Mises criterion in any of their homogeneous regions. As it can be seen in Fig. 3c, only two fields were used to construct the solution, the ones having library denotations 's26x' and 'Ns', respectively. Magnified view of these fields is shown in Fig. 3d. The field 'Ns' realises uniaxial tension with stresses equal to the plasticity limit  $\sigma_y$ . The state of stress in the field 's26x' is more complex, and will not be discussed here.

The solution presented in Fig. 3b fully determines shape and dimensions of the designed weldment. One obtains, among other things, weld inclination angle equal to  $55^\circ$  and the length of the weld leg (the weld width),  $b = 2.12g$ .

The dimensions were obtained under the assumption of lower-bond evaluation of load capacity of the joint. They are estimates of upper limits of actual dimensions of the joint. The lower limits evaluation will be done through the analysis of kinematically-admissible collapse mechanisms.

## 3. Analyses of kinematically-admissible collapse mechanisms

One analyses simple, kinematically-admissible collapse mechanisms, which are presented in Fig. 4a. The mechanisms consist in motion of rigid blocks separated by the edges of velocity discontinuity, drawn as thick lines in the figure. In the cases



Rys. 3. Sformułowanie i rozwiązanie zadania kształtowania połączenia nakładkowego z wykorzystaniem metody SADSF

Fig. 3. Formulation and solution of the overlap welded joint by using the SADSF method

mi. W przypadku mechanizmów 1 i 2 krawędzie te są nachylone do kierunku rozciągania pod kątem  $45^\circ$ . Mechanizm 3 polega na ścięciu wzdłuż krawędzi o długościach  $R$  nachylonych pod kątem  $\varphi$  do osi złącza. Na każdej krawędzi nieciągłości musi działać naprężenie styczne  $\tau = \sigma_y/2$  (przyjęto warunek Treski). W każdym przypadku zakładano, że część blachy środkowej do której przyłożono obciążenie  $p$  porusza się z prędkością poziomą  $V$ . Prędkości pozostałych elementów muszą się tak dobrać żeby zachowana była ciągłość materiału - dla każdego mechanizmu będą one inne i na rys. 4a ich nie naniesiono. Układając bilanse mocy dla mechanizmów 1 i 2 otrzymano graniczną wartość obciążenia:

$$p_{gr} = \sigma_y \quad (2)$$

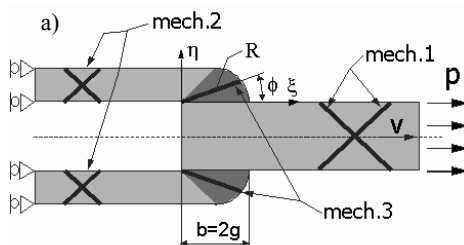
Obciążenie to jest równe obciążeniu zakładanemu podczas projektowania SADSf. Widać więc, że o rzeczywistej nośności złącza decyduje jego kształt w obszarze połączenia blach (spoiny) i realizujące się tam mechanizmy zniszczenia. Najbardziej prawdopodobnym wydaje się mechanizm 3. Układając dla niego bilans mocy i przyjmując wartość obciążenia granicznego jak dla mechanizmów 1 i 2 otrzymano zależność:

$$R = 2g \cos(\varphi) \quad (3)$$

Zmieniając  $\varphi$  w granicach od 0 do  $45^\circ$  i wyznaczając  $R$  z powyższego równania wyznaczono kształt, który przedstawiono na rys. 4b. Jak widać jest to ćwiartka okręgu, którego równanie we współrzędnych  $\{\zeta, \eta\}$  można zapisać następująco:

$$(\zeta - g)^2 + \eta^2 = g^2 \quad (4)$$

Wynikowy kształt połączenia przedstawia rys. 4b. Kształt ten jest bardzo bliski otrzymanemu z pól statycznie dopuszczalnych (por. rys. 3b). Otrzymane przewymiarowanie (wniosek 1) jest w tym przypadku niewielkie.



Rys. 4. Kinematyczne mechanizmy zniszczenia i otrzymany kształt spoiny

Fig. 4. Kinematic mechanisms of plastic collapse and obtained weld shape

W obydwu przypadkach otrzymane kształty istotnie różnią się od typowo wykonywanych złączeń nakładkowych przede wszystkim szerokością łączenia blach (wymiar  $b$ ). Jak wykazują przeprowadzone analizy szerokość spoiny tego połączenia powinna zawierać się w wąskim przedziale:

$$2.12g \geq b \geq 2g \quad (5)$$

podczas gdy w połączeniach tradycyjnych jest ona przyjmowana jako  $b=1g$ . Zaskakujące jest to, że praktyka inżynierska tego nie zauważa, a powinien to być wynik znany z teorii nośności granicznej, bo przecież – jak już powiedziano we wstępie - metody obliczeń Podstaw Konstrukcji Maszyn – m.in. obliczanie ‘na ścięcie’ nitów, wpustów, a także spoin - w twierdzeniu o górnej ocenie mają swoje uzasadnienie.

of mechanisms 1 and 2, the edges are inclined by an angle of  $45^\circ$  relative to tension direction. Mechanism 3 consists in shearing along the edges of lengths  $R$  inclined by an angle  $\varphi$  relative to the joint axis. On each discontinuity edge, there must exist a shear stress  $\tau = \sigma_y/2$  (one assumes Treska condition). In each case, it was assumed that the part of the central plate to which the load  $p$  is applied moves with horizontal velocity  $V$ . The velocities of the remaining parts of the material have to adjust to it in order to preserve continuity of the material. These velocities are different for each kind of the mechanisms, so that they are not indicated in Fig. 4a. By making up the balance of powers for mechanisms 1 and 2, one obtains the limit value of load:

$$p_{gr} = \sigma_y \quad (2)$$

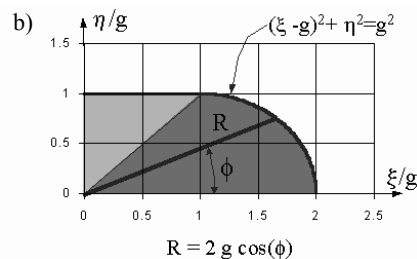
The load is equal to that assumed in the design by the SADSf method. Then, one can see that the shape of the weldment (the shape of the weld area), and the collapse mechanisms that exist there, determine actual load capacity of the joint. Mechanism 3 seems to be the most probable one. Making up the balance of powers for it, and assuming the value of limit load as for mechanisms 1 and 2, one obtains the relationship:

$$R = 2g \cos(\varphi) \quad (3)$$

Varying the value of  $\varphi$  within the range from 0 to  $45^\circ$ , and using the  $R$  value calculated with the above equation, one obtains the shape of weld presented in Fig. 4b. As it can be seen, it is a quarter of a circle, whose equation in the coordinates  $\{\zeta, \eta\}$  is:

$$(\zeta - g)^2 + \eta^2 = g^2 \quad (4)$$

The resulting shape of the weldment is shown in Fig. 4b. This shape is very close to that derived from the statically-admissible stress fields (see Fig. 3b). The change in dimensioning (Conclusion 1) is insignificant in this case.



In both cases, the shapes of joints significantly differ from those of typically-made overlapping weldments, first of all by the weld leg length (dimension  $b$ ). According to the performed analyses, the weld leg length should be kept within a narrow interval:

$$2.12g \geq b \geq 2g \quad (5)$$

while in traditional joints it is assumed that  $b=1g$ . It is quite surprising that this discrepancy has not been noticed in engineer's practice. This result should have been known from the theory of limit load capacity, because – as it was mentioned in the Introduction – the calculation methods of the Machine Design Fundamentals, including those concerning the resistance of rivets, keys, as well as welds to shear, are based upon the theorem of upper-bound evaluation.

W dalszej części pracy badany jest wpływ wymiaru  $b$ , przy ustalonych pozostałych wymiarach złącza na współczynnik koncentracji naprężenia i trwałość zmęczeniową.

4. Wyniki analiz MES

Wpływ szerokości łączenia na wartość współczynnika koncentracji analizowano wykorzystując MES. Analizy prowadzono przy założeniu (por. rys. 5a):  $g=10$ ;  $g/r=0.1$  i kąta pochylenia spoiny równego  $45^\circ$ . Zmieniało się jedynie szerokość łączenia  $b$  w zakresie od  $g$  do  $2.5g$ .

W obliczeniach zakładano dodatkowo m.in.: liniowo-sprężysty model fizyczny materiału, małe przemieszczenia, płaski stan naprężenia i elementy typu SHELL3 (nie uwzględniano wpływu szerokości blach - wymiar w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rys. 5a), obciążenie równe połowie wyznaczonej wartości granicznej. Rozpatrywano jedynie symetryczną połowę połączenia, a obliczenia wykonywano przy pomocy pakietu CosmosM.

Jak zmienia się współczynnik koncentracji  $K_t$  przy zmianach stosunku wymiarów  $b/g$ , pokazują wyniki przedstawione na rys. 5b. Przy stosunku wymiarów  $b/g=1$  otrzymuje się współczynnik koncentracji  $K_t = 8$ , natomiast dla  $b/g=2.12$  - dobrego według SADSF - wartość tego współczynnika spada aż do  $K_t = 3.83$ . Warto zauważyć, że już niewielkie zwiększenie szerokości łączenia skutkuje dużym zmniejszeniem współczynnika koncentracji - dla  $b/g=1.25$  otrzymano  $K_t=6.18$  (spadek o ponad 22%), a dla  $b/g=1.5$  współczynnik ten wynosi  $K_t=5.1$  (spadek o 36%).

Zazwyczaj w przypadku tego typu połączeń stosuje się wystawienie grubszej blachy poza spoinę tak jak to przedstawiono na rys. 6a. Dlatego wykonano również serie obliczeń dla takiego przypadku, przy założeniu, że stosunek wymiarów  $b/g$  zmienia się jak w wariancie wcześniejszym, natomiast wysunięcie (wymiar  $a$ ) jest stałe i równe  $a=g$ . Otrzymane wyniki ilustruje rys. 6b. W tym przypadku otrzymujemy duże naprężenia również na konturze, po drugiej stronie spoiny. Dlatego wprowadzono tutaj dwa współczynniki koncentracji  $K_{t1}$  i  $K_{t2}$  (por. rys. 6a). Naprężenia na brzegu z lewej strony spoiny są tutaj nawet większe ( $K_{t2}$ ). W przypadku jednak, gdy do złącza jest przyłożona siła rozciągająca, otrzymujemy tam ściskanie i nie ma ono wpływu na trwałość zmęczeniową połączenia.

Współczynnik koncentracji liczony na linii wtopu ( $K_{t1}$ ) jest w tym przypadku mniejszy, niż w wariancie bez wysunięcia (por. rys. 6b), szczególnie w zakresie stosunku wymiarów:  $1 \geq b/g \geq 1.75$ .

5. Prognozowanie trwałości zmęczeniowej

Analizy zmęczeniowe wykonano z wykorzystaniem metody odkształceń lokalnych (metoda  $\epsilon$ -N) i skoncentrowano się na wyznaczaniu okresu inicjacji pęknięć. Wszystkie obli-

In the next part of the paper, we will examine the influence of the dimension  $b$ , with fixed values of the remaining dimensions, on stress concentration factor and fatigue life of the joint.

4. Results of FEM analyses

The influence of the weld leg length on the value of stress concentration factor was analysed using the FEM. The analyses were carried out under the assumptions (see Fig. 5a):  $g = 10$ ;  $g/r = 0.1$ , weld inclination angle equal to  $45^\circ$ . Only the leg length  $b$  was changed in the range from  $g$  to  $2.5g$ .

In the calculations, one additionally assumed, among other things, linearly-elastic model of the material, small strains, plane state of stress and elements of type SHELL3 (the influence of the width of sheet-metal plates - the dimension in the direction perpendicular to the plane of Fig. 5a - was not taken into account), and the load equal to a half of the determined limit value. One considered only one of the symmetrical parts of the joint. The calculations were performed by means of the software package CosmosM.

The results presented in Fig. 5b show the changes of the stress concentration factor  $K_t$  in the function of dimension ratio  $b/g$ . When the ratio is equal to  $b/g = 1$ , one obtains  $K_t = 8$ . However, for  $b/g = 2.1$  - the value selected according to the SADSF method - this factor decreases to the value as low as

$K_t = 3.83$ . It is worth noticing that even small increase of the leg length results in significant decrease of stress concentration factor - i.e. for  $b/g = 1.25$  one obtains  $K_t = 6.18$  (a drop by over 22%), and for  $b/g = 1.5$ , stress concentration factor is equal to  $K_t = 5.1$  (a 36% drop).

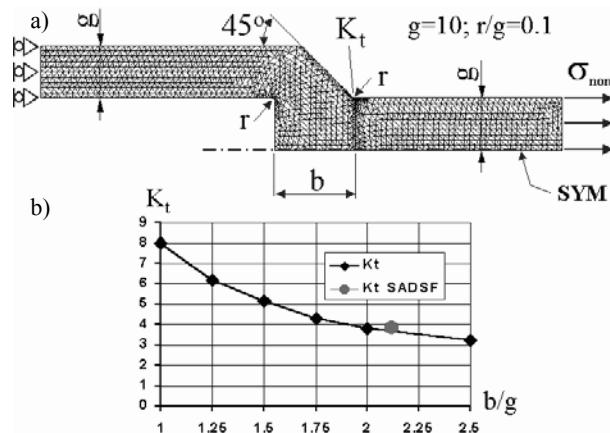
Usually, in this kind of joints, the edge of the thicker (central) plate is shifted beyond the edge of the weld, as it is shown in Fig. 6a. For this reason, we performed a series of calculations also for such an arrangement of plates, assuming that the dimension ratio  $b/g$  changes in the same range as in the previous variant, while the plate shift (dimension  $a$ ) is constant and equal to  $a = g$ .

The obtained results are illustrated by Fig. 6b. In this case, we obtain high stresses also on the contour at the other side of the weld. Therefore, two stress concentration factors,  $K_{t1}$  and  $K_{t2}$ , should be introduced here (see Fig. 6a). The stresses on the left-side edge of the weld ( $K_{t2}$ ) are even greater here. However, when a tensional force is applied to the joint, a compression stresses appears there, which has no effect on fatigue life of the joint.

The stress concentration factor on the weld fusion line ( $K_{t1}$ ) calculated in this case is smaller than that in the variant without the inner plate shift (see Fig. 6b), especially for dimension ratio in the range of  $1 \geq b/g \geq 1.75$ .

5. Prediction of fatigue life

The fatigue analyses were performed with the use of local strain method (the  $\epsilon$ -N method), and concentrated on determining the fatigue crack initiation lives. All the calculations were



Rys. 5. Model MES i otrzymany przebieg współczynnika koncentracji naprężenia w funkcji szerokości spoiny  $b$

Fig. 5. The finite element model and evolution of stress concentration factor  $K_t$  as a function of the weld leg length  $b$

czenia były wykonywane z wykorzystaniem programu FALIN [4]. Szacowanie okresu inicjacji przeprowadzono w punktach na linii wtopu gdzie podczas obliczeń MES stwierdzono maksymalne koncentracje. W tych miejscach spodziewamy się, że pęknięcia będą się inicjowały w pierwszej kolejności.

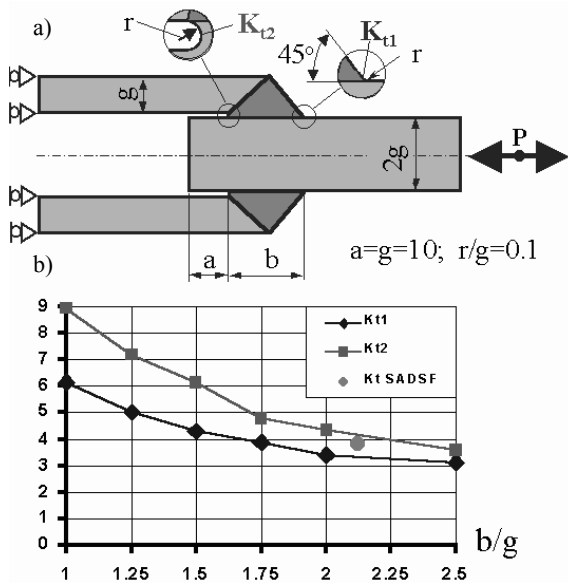
Otrzymane z MES wyniki posłużyły do dalszych analiz szacowania okresu inicjacji pęknięć zmęczeniowych, które przeprowadzono zakładając m.in.:

- materiał połączenia stal A-356, której własności zmęczeniowe pokazano na rys. 7a i 7b;
- obciążenie naprężeniami nominalnymi  $\sigma_{nom}$  w postaci powtarzającego się bloku, którego przebieg przedstawiono na rys. 7c; zawiera on 1132 punkty, a maksymalne i minimalne naprężenia wynoszą odpowiednio: 50.4 [MPa] i -43.088 [MPa];
- wykorzystanie hipotezy Neubera [4,8,13] do wyznaczenia odkształceń w analizowanych punktach.

Otrzymane wyniki w postaci liczby bloków obciążeń do inicjacji pęknięcia zmęczeniowego otrzymanych dla różnych stosunków wymiarów  $b/g$  przedstawiono na rys. 8b. Jak widać różnica w trwałości pomiędzy połączeniem wykonanym tradycyjnie a zaprojektowanym SADSf wynosi 50 razy.

Z pewnością wykonywanie połączeń nakładkowych przy  $b/g \approx 2$  jest trudniejsze do wykonania i droższe. Może być to jednak opłacalne do zastosowania w przypadku konstrukcji odpowiedzialnych lub już istniejących, które pękają. Poszerzenie szerokości łączenia, a tym samym radykalne zwiększenie trwałości zmęczeniowej, jest bowiem możliwe do uzyskania, bez konieczności zmiany podstawowych parametrów geometrycznych połączenia, takich jak grubości blach czy jego ogólne wymiary.

Warto zwrócić uwagę, że zwiększenie stosunku wymiarów



Rys.6. Połączenie nakładkowe z wystawieniem blachy poza spoinę oraz przebiegi współczynników koncentracji  $K_{t1}$  i  $K_{t2}$  w funkcji szerokości spoiny  $b$

Fig. 6. The overlap weldment with the excess of material in the weld root region, the evolution of the weld toe ( $K_{t1}$ ) and the weld root ( $K_{t2}$ ) stress concentration factors with the increase of the weld leg length  $b$

performed with the use of the FALIN software [4]. Estimation of the crack initiation life was made at the points on the weld fusion line, where peak stress concentrations were detected by FEM calculations. We expected that the cracks would be initiated firstly at these points.

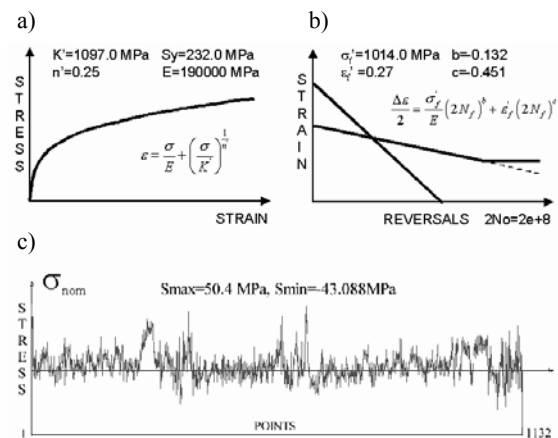
The results obtained by the FEM were consequently used for further analyses in order to evaluate the fatigue crack initiation life. In these analyses, one assumed:

- material of the joint – steel A-356, whose fatigue properties are shown in Figs. 7a and 7b;
- loading with reference stress  $\sigma_{nom}$  history in the a block form, whose course is shown in Fig. 7c; in each stress block there are 1132 reversal points; maximal and minimal stress values are 50.4 [MPa] and -43.088 [MPa], respectively;
- the Neuber rule [4,8,13] applied for determining strains at the analysed points.

The results are presented in Fig. 8a. The graph shows the number of blocks applied before the initiation of fatigue crack plotted against the dimension ratio  $b/g$ . As it can be seen, fatigue life of the joint designed with the SADSf method is 50 times greater than life of a traditionally-made joint.

Undoubtedly, it is more difficult and more expensive to make overlapping weldments with  $b/g \approx 2$ . However, it might be profitable in the case of high-performance structures, or in some existing structures where cracks have already appeared. Extending the weld leg length, and at the same time radically improving fatigue life, is possible to achieve without the necessity of changing fundamental geometrical parameters of the joint, such as thickness of the plates, or their overall dimensions.

It is worth noticing that, by changing the dimension ratio  $b/g$  only from 1 to 1.25, one can increase crack initiation life



Rys.7. Własności zmęczeniowe materiału połączenia oraz założony przebieg  $\sigma_{nom}$  jednego bloku obciążenia

Fig. 7. The cyclic and fatigue material properties used in the fatigue analyses and the nominal stress history

$b/g$  tylko z 1 do 1.25 daje prawie czterokrotne zwiększenie okresu inicjacji pęknięć, a dla  $b/g=1.5$  okres ten zwiększa się dziesięciokrotnie.

6. Siły wewnętrzne w złączach zakładkowym i nakładkowym

Uzyskany w złączu nakładkowym współczynnik koncentracji jest bardzo duży, jeśli wziąć na przykład pod uwagę podobne - przynajmniej geometrycznie - złącze zakładkowe, które przedstawiono na rys. 9a. Dla tego złącza - wyznaczony z wykorzystaniem MES - współczynnik koncentracji jest ponad sześciokrotnie mniejszy ( $8/1.3 \approx 6.15$ ). Gdzie tkwi przyczyna tego stanu rzeczy?

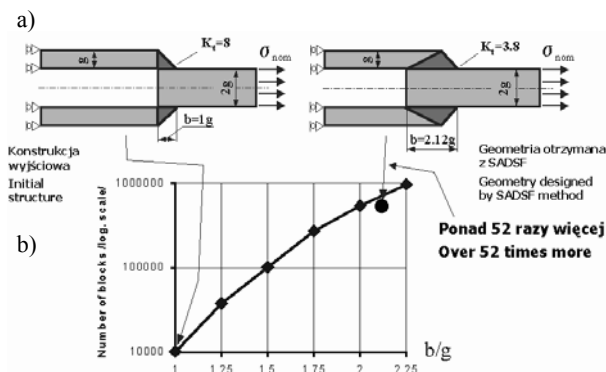
Żeby to stwierdzić, należy przeanalizować siły wewnętrzne w obu złączach, a przede wszystkim w przekrojach poprzecznych poprowadzonych przez punkty na linii wtopu spoiny gdzie stwierdzono maksymalne koncentracje (rys. 9,10).

Na początek należy zauważyć, że w odróżnieniu od złącza zakładkowego na symetryczną połówkę złącza nakładkowego oprócz obciążenia zewnętrznego naprężeniami  $\sigma_{nom}$ , działają jeszcze naprężenia  $\sigma_{yy}$  na osi symetrii, których otrzymano z MES rozkład przedstawiono na rys. 10a. To właśnie te naprężenia powodują 'powstawanie' tak dużej koncentracji na linii wtopu. Ich istnienia nie da się wyeliminować, zapewniają one bowiem spełnienie równania równowagi globalnej momentów symetrycznej połówki złącza (rys. 10a).

Naprężenia te powodują, że w symetrycznej połowce przekroju złącza nakładkowego działają - oprócz siły rozciągającej  $P$ , która występuje również w złączu zakładkowym (rys. 9b) - siła poprzeczna  $Q$  i moment  $B$  (rys. 10a). W całym przekroju poprzecznym złącza otrzymujemy układ sił, który przedstawiono na rys. 10b.

Szczególnie interesujące jest tutaj występowanie wzajemnie się równoważących dwóch momentów  $B$  czyli faktycznie bimomentu, który byłby nie do wykrycia bez analiz rozkładów sił wewnątrz złącza, a który ma zasadniczy wpływ na wielkość maksymalnej koncentracji. Bimoment można również zidentyfikować analizując w rozważanym przekroju rozkład naprężeń  $\sigma_{xx}$ , który pokazano na rys. 10c.

Zwiększenie szerokości spoiny powoduje zmniejszenie naprężeń  $\sigma_{yy}$  działających z prawej strony poprowadzonego przez linię wtopu przekroju, a tym samym zmniejszenie momentów  $B$  i koncentracji na brzegu. Otrzymane dla różnych stosunków



Rys.8. Efekt zwiększenia okresu inicjacji pęknięć w punktach najbardziej zagrożonych

Fig. 8. Effect of the fatigue crack initiation life at the critical location

almost four times, and for  $b/g = 1.5$  this parameter increases almost tenfold.

6. Internal forces in lap and overlapping weldments

The stress concentration factor obtained in overlapping weldment is very high, even if one compares it to a similar – at least in a geometrical sense – lap weldment, such as presented in Fig. 9a. Stress concentration factor in this weldment, determined with the use of the FEM method, is over six times lower ( $8/1.3 \approx 6.15$ , see Figs. 8a and 9a). What is the reason for that?

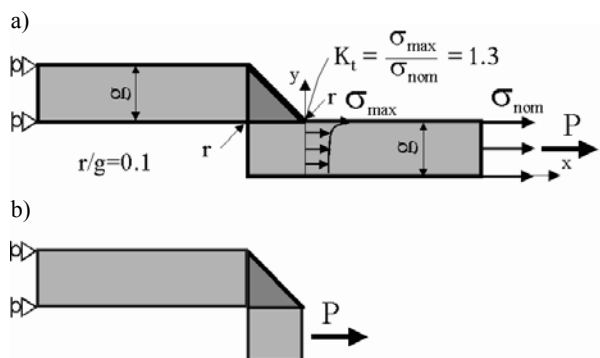
In order to answer this question, one must analyse internal forces in both joints, first of all the forces in cross-sections passing through the points on the weld fusion line, where maximal stress concentrations appear (Figs. 9,10).

Besides, we must notice that, contrary to what happens in a lap joint, symmetrical halves of an overlapping joint are loaded not only by external stresses  $\sigma_{nom}$ , but also by stresses on the symmetry axis  $\sigma_{yy}$ , whose distribution, calculated by FEM, is plotted in Fig. 10a. These are the stresses which 'should be blamed' for such a high concentration on the fusion line. They can not be eliminated, because their existence is necessary for the fulfilment of equation of global equilibrium of moments in a symmetrical half of the joint (Fig. 10a).

Due to the existence of the mentioned stresses, in each symmetrical half of an overlapping joint there appear the transverse force  $Q$  and the moment  $B$  (Fig. 10a), which act together with the tensional force  $P$  – the one that exists also in a lap joint (Fig. 10a). Then, in the whole cross-section of the joint, we obtain the system of forces shown in Fig. 10b.

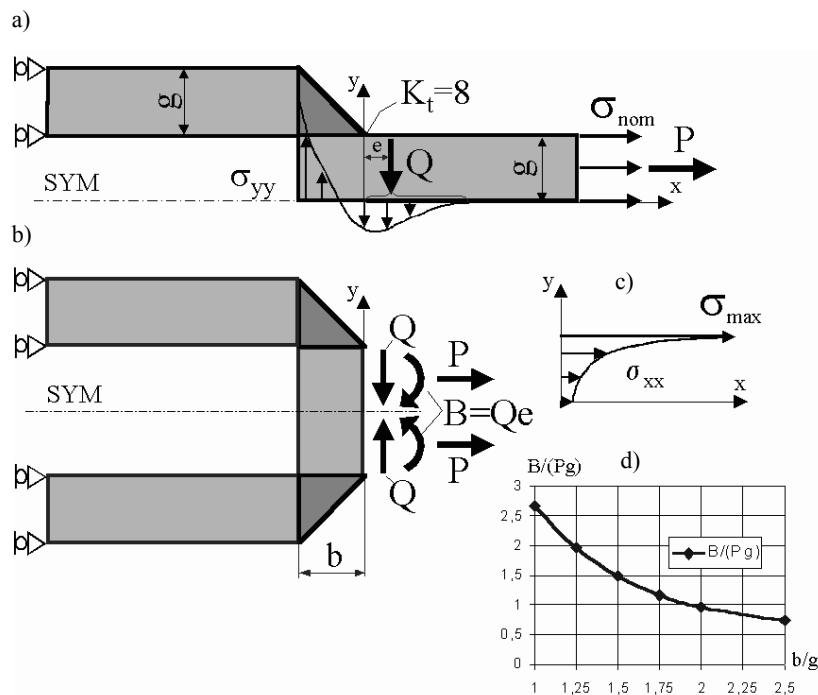
The most interesting thing is the existence of two moments  $B$  which counterbalance one another. In fact, it is a bi-moment, whose presence would not be possible to detect without the analyses of force distributions within the joint, and which has a decisive impact on stress concentration. The bi-moment can also be identified by analysing stress distribution  $\sigma_{xx}$  in the considered section, as shown in Fig. 10c.

The increase of weld leg length will result in a decrease of stresses  $\sigma_{yy}$  acting at the right side of the cross-section passing through the fusion line. At the same time, the moment  $B$  and stress concentration on the edge will also decrease. The values of moment  $B$  calculated for different dimension ratios  $b/g$  are



Rys.9. Siły wewnętrzne w połączeniu zakładkowym

Fig. 9. Internal forces in the lap welded joint



Rys.10. Siły wewnętrzne w połączeniu nakładkowym  
 Fig. 10. Internal forces in the overlap welded joint

wymiarów  $b/g$  wartości momentu  $B$  przedstawiono na rys. 10d. Podobny efekt uzyskuje się poprzez wprowadzenie wysunięcia blachy poza spoinę.

## 7. Wnioski

Bardzo często wstępny kształt i wymiary elementów konstrukcyjnych i połączeń są dobierane w sposób intuicyjny, w którym bazuje się na rozwiązaniach już istniejących itp. Takie podejście prowadzi w bardzo wielu przypadkach do rozwiązań o niskim poziomie jakościowym, które są następnie poddawane kosztownym analizom, a otrzymane rezultaty tą niską jakością jedynie potwierdzają, bez wskazania kierunków ewentualnej poprawy.

Jak pokazują wyniki tej pracy do wyznaczania wstępnych kształtów możemy stosować metody nośności granicznej. Konstrukcje zaprojektowane prawidłowo z punktu widzenia nośności granicznej mają dobre własności nośne, a w szczególności dobre wyrównanie sprężystego wyężenia, niskie koncentracje deformacji w tym zakresie i w konsekwencji dużą trwałość zmęczeniową.

Tak samo dobre własności stwierdzono w przypadku kilkudziesięciu przebadanych dotychczas numerycznie i eksperymentalnie konstrukcji [3,6,7,9-12], które zostały zaprojektowane metodą SADSf. Własności takie można już uważać za oczekiwane.

plotted in Fig.10d. A similar effect can be obtained by shifting the plate beyond the weld.

## 7. Conclusions

Very often, initial shape and dimensions of constructional elements and joints are chosen in an intuitive way, when one follows the concepts of already-existing solutions, etc. Such an approach may lead, in many cases, to solutions of inferior quality, which must consequently be subjected to costly analyses, and the results of these analyses only confirm low quality of the structures, without giving any hints about directions of possible improvements.

The results of this study indicate that the limit analysis methods may well be used to determining initial shapes of the elements and joints. Correctly designed structures – according to the criteria of limit load – have good load-carrying properties. In particular, they exhibit good equalization of elastic effort, low strain concentrations in elastic range, and high fatigue life.

Equally good properties have been confirmed so far in several dozens of structures designed with the use of the SADSf method, (examined numerically and experimentally by the author [3,6,7,9-12]). We can then assume that similar properties can be generally expected.

### 8. References

- [1] Bodaszewski W., Szczepiński W.: *Kształtowanie elementów konstrukcji metodą nieciągłych pól naprężeń*, BEL Studio 2005, PWN 2006.
- [2] Bodaszewski W.: *The software package KNPN for approximated shaping of complex plastic structures*, VII Sympozjum Stateczności Konstrukcji, 1997, str. 25-30.
- [3] Bodaszewski W., Markiewicz I.: *Badania powłok ukształtowanych metodą SDNPN w zakresie pełnych ścieżek równowagi*, XIX Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka, 2000, str. 145-150.
- [4] Glinka G.: *Fatigue Software Package FALIN*, Stress and Fatigue-Fracture Design Inc. (SaFFD, Inc.), RR#2 Petersburg, Ontario N0B 2H0, Canada, 2002.
- [5] Markiewicz I.: *Numeryczne wyznaczanie statycznie dopuszczalnych układów linii nieciągłości naprężeń w polach granicznych, spełniających warunek plastyczności Hubera-Misesa*, Politechnika Warszawska 1996.
- [6] Markiewicz I.: *Numeryczne badania sprężystych pól wyężenia w segmencie skręcanego wysięgnika kratowego ukształtowanego metodą SDNPN*, XIII konf. nt. Problemy rozwoju maszyn roboczych, Zakopane 2000, t. 2, str.17-22.
- [7] Markiewicz I., Bodaszewski W., Glinka G.: *Global and Local Design Method for Fatigue Resistant Structures*, SAE 2003 Transactions, Journal of Materials and Manufacturing, Section 5 - Volume 112, p. 467-477.
- [8] Sobczykiewicz W., Glinka G., Jakubczak H.: *Fatigue Design of Earthmoving Machines*, International Symposium on Fatigue Design, Helsinki, Finland, 1992, Proceedings, pp. 283-298.
- [9] Szczepiński W.: *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, 1968.
- [10] Szczepiński W., Dietrich L.: *Plastic Design of Complex Shape Structural Elements - A Theoretical and Experimental Study*, Paryż 1981, 1 - 8.
- [11] Szczepiński W., Szlagowski J.: *Plastic Design of Complex Shape Structures*, Ellis Horwood & PWN, Warszawa - Chichester 1990.
- [12] Szlagowski J.: *Metodyka kształtowania wytrzymałościowego elementów konstrukcji wg kryterium nośności granicznej*, Prace IPPT PAN, 25/1990.
- [13] Wetzel R. M.: (ed.), *Fatigue under Complex Loading: Analysis and Experiments*, vol. 6, Society of Automotive Engineers, Warrendale, Pa., 1977.
- [14] Chan S.W.K.: *The Strength of Fillet Welded Joints in Steels Subjected to Static Loading - a Review*, The Welding Institute, Cambridge, UK, Paper No. 379, 1988.

---

**Dr inż. Ireneusz MARKIEWICZ**

Politechnika Świętokrzyska  
Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn  
Katedra Mechaniki  
Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7  
25-314 Kielce  
e-mail: zwmim@tu.kielce.pl

---