

Dr inż. Andrzej Katunin

Dr inż. Piotr Przystalka

Institut Podstaw Konstrukcji Maszyn

Politechnika Śląska

ul. Konarskiego 18A, 44-100 Gliwice, Polska

E-mail: andrzej.katunin@polsl.pl, piotr.przystalka@polsl.pl

Detekcja i lokalizacja rozwarstwień w kompozytowych belkach z wykorzystaniem B-splajnowych falek ułamkowych z optymalizowanymi parametrami

Słowa kluczowe: *detekcja i lokalizacja rozwarstwień, kompozyty warstwowe, ułamkowe faleki B-splajnowe, optymalizacja*

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę detekcji i lokalizacji rozwarstwień w kompozytowych belkach warstwowych z wykorzystaniem algorytmu opartego na transformacji falkowej giętnych postaci własnych drgań belek. Jako funkcje bazowe zastosowano ułamkowe faleki B-splajnowe z jedno- i wielokryterialną optymalizacją wartości ich parametrów. Analizę przeprowadzono na wynikach obliczeń numerycznych. Przeanalizowano przypadki występowania rozwarstwień w różnej lokalizacji na grubości płyt oraz przypadki z rozwarstwieniami o różnych rozmiarach i postaciach geometrycznych. Wyniki przeprowadzonych analiz wykazały wysoką skuteczność metody w wykrywaniu rozwarstwień i możliwość jej zastosowania w warunkach przemysłowych.

1. Wstęp

Wykorzystanie kompozytów warstwowych jako materiału konstrukcyjnego w elementach konstrukcji inżynierskich stało się obecnie powszechne i popularne dzięki możliwości znacznej redukcji masy elementów przy zachowaniu właściwości wytrzymałościowych, dużej elastyczności w projektowaniu takich konstrukcji, możliwości integracji elementów pomiarowo-wykonawczych w strukturze i in. Z tego względu zaistniała potrzeba rozwoju metod diagnostycznych dedykowanych dla tych materiałów. Niektóre metody i techniki diagnostyki strukturalnej dedykowane dla materiałów homogenicznych znalazły zastosowanie także w przypadku materiałów kompozytowych, jednak dla diagnostyki kompozytów metody te wymagają dalszego rozwoju uwzględniającego możliwość diagnozowania nowych typów uszkodzeń, niewystępujących w materiałach homogenicznych, np. rozwarstwienia, pęknięcia włókien wzmacniających, dekohezja na granicy faz i in. Ponadto, metody te powinny cechować się nieinwazyjnością, wysoką wrażliwością na uszkodzenia, odpornością na oddziaływania zewnętrzne, niskimi kosztami wykonania badań oraz łatwością ich przeprowadzenia w warunkach przemysłowych.

Wśród metod stosowanych w diagnostyce strukturalnej kompozytów polimerowych należy wyróżnić następujące grupy: metody interferometryczne, radiologiczne, termowizyjne i inne, które wymagają jednak zaawansowanego sprzętu pomiarowego do prowadzenia badań, co często ogranicza je do warunków laboratoryjnych. Jedną z dynamicznie rozwijających się metod są metody oparte na analizie postaci własnych drgań lub profili ugięcia z wykorzystaniem zaawansowanych technik przetwarzania sygnałów. Jedną z takich technik, aktywnie rozwijanych w zagadnieniach diagnostyki strukturalnej, jest transformacja falkowa.

Ta technika zyskała dużą popularność dzięki wysokiej wrażliwości na nagłe zmiany w sygnale, a ponadto możliwością doboru funkcji bazowych i skalujących w zależności od rodzaju wykrywanych zmian w analizowanym sygnale.

Metody wykrywania pęknięć w belkach z wykorzystaniem transformacji falkowej były analizowane przez wielu autorów. Na uwagę zasługują prace [3,14], w których przedstawiono algorytm wykrywania pęknięć w belkach na podstawie postaci własnych drgań z wykorzystaniem ciągłej transformacji falkowej (CWT) oraz symletów jako funkcji bazowych. Autorzy pracy [24] również wykorzystali CWT oraz symlety rzędu 4. do detekcji pęknięć w belkach swobodnie podpartych. W przypadku zastosowania transformacji falkowej w zagadnieniach diagnostyki strukturalnej decydujące znaczenie ma wybór falki, przy pomocy której dokonywana jest transformacja. Autorzy pracy [19] przedstawili problem identyfikacji pęknięć z wykorzystaniem CWT oraz przeprowadzili analizę porównawczą falek, z której wynika, że najbardziej skutecznymi falkami w problemach diagnostyki strukturalnej są falki Gabora. Inne podejście zostało przedstawione w pracach [16,20], gdzie analizę falkową przeprowadzono na podstawie statycznych profili ugięcia belek. Alternatywną metodą rozwijaną przez pierwszego autora artykułu [8-10] jest metoda oparta na dyskretnej transformacji falkowej (DWT), która pozwala znacznie zredukować czas obliczeń i charakteryzuje się największą dokładnością w porównaniu z innymi rodzajami transformacji falkowej, co potwierdziły wyniki analizy porównawczej przedstawione w [12]. DWT narzuca szereg ograniczeń na falki, które mogą być wykorzystane w analizie. Falki te powinny posiadać zwarty nośnik oraz spełniać warunki ortogonalności, co eliminuje możliwość zastosowanie falek Gabora określonych jako najbardziej efektywne w rozpatrywanych zagadnieniach [19]. Jednak, zastosowanie falek B-splajnowych daje możliwość uzyskania równie dobrych wyników ze względu na ich zbieżność do falek Gabora, szczególnie w przypadku wyższych rzędów falek B-splajnowych [22].

Wykrywanie i lokalizacja rozwarstwień w belkach kompozytowych stanowi trudniejszy problem, niż w przypadku pęknięć. Jest to spowodowane występowaniem nieciągłości jedynie na granicach rozwarstwień, co utrudnia proces identyfikacji tych uszkodzeń. W literaturze można znaleźć jedynie kilka pozycji opisujących badania dotyczące wykrywania i lokalizacji rozwarstwień w strukturach kompozytowych. W pracy [18] opisano metodę lokalizacji rozwarstwień na podstawie analizy sygnałów drganiowych. Praca [7] przedstawia wyniki zastosowania falek Haara do wykrywania rozwarstwień w belkach kompozytowych. Jednak, metody wibracyjne charakteryzują się słabą wykrywalnością tych uszkodzeń, co potwierdzają autorzy pracy [25].

Innym bardzo ważnym aspektem, na który należy zwrócić uwagę jest fakt, że metody diagnozowania bazujące na transformacji falkowej wymagają właściwego doboru parametrów stosowanych falek. Można wskazać ciekawe prace badawcze podejmujące ten problem. Na przykład autorzy pracy [4] zaproponowali metodę optymalizacji wielokryterialnej z zastosowaniem algorytmu ewolucyjnego do poszukiwania parametrów falek użytych w analizie sygnałów EKG w celu dokładniejszego opisu tego sygnału. Rafiee i in. w pracy [17] pokazali sposób wykorzystania sztucznych sieci neuronowych i algorytmów genetycznych do wyboru najlepszych funkcji falkowych w celu poprawy dokładności diagnostyki uszkodzeń przekładni. Problem ten był również przedmiotem interesujących prac z zakresu doboru parametrów falek w zastosowaniach do filtracji sygnałów [6] oraz przetwarzania obrazów [5]. Z drugiej strony, zauważalny jest brak badań w zakresie zastosowania metod optymalizacji do doboru parametrów ułamkowych falek B-splajnowych stosowanych w zagadnieniu detekcji i lokalizacji rozwarstwień w belkach kompozytowych.

W przedstawionej pracy autorzy próbują rozwiązać problem z wykrywalnością rozwarstwień poprzez zastosowanie algorytmu opartego na DWT oraz wykorzystanie falek B-splajnowych niecałkowitego rzędu opracowanych przez autorów pracy [23]. Poprzednie

wyniki przedstawione w pracy [11] wskazują na zwiększenie efektywności przy wykrywaniu uszkodzeń z wykorzystaniem ułamkowych falek B-splajnowych w stosunku do falek B-splajnowych rzędu całkowitego. Aby zwiększyć efektywność wykrywania rozwarstwień algorytm został rozbudowany o optymalizację jedno- i wielokryterialną parametrów ułamkowych falek B-splajnowych, która pozwala na automatyczny dobór optymalnej falki dla rozpatrywanego przypadku uszkodzenia. W pracy przeanalizowano cztery grupy przypadków rozwarstwień odmiennych ze względu na kształt i położenie na grubości belki. W szczególności przeanalizowano wpływ kształtu i położenia rozwarstwień na ich wykrywalność oraz na zmienność parametrów optymalnie dobranej falki. Wyniki przedstawionych badań wskazują na fakt, że przedstawiona metoda pozwala na wykrywanie i dokładną lokalizację obszarów rozwarstwień w belkach kompozytowych.

2. Opis metody

W tym rozdziale zostaną przedstawione podstawy matematyczne falek B-splajnowych niecałkowitego rzędu, metoda detekcji i lokalizacji rozwarstwień z ich wykorzystaniem oraz sposób doboru parametrów falek B-splajnowych niecałkowitego rzędu z wykorzystaniem optymalizacji wielokryterialnej.

2.1. B-splajnowe funkcje skalujące i falki niecałkowitego rzędu

Podstawową zasadą w DWT jest wykorzystanie analizy wielorozdzielczej, zaproponowanej przez Mallata w [15], gdzie B-splajnowe funkcje skalujące $\beta(x)$ stanowią przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem $L^2(\mathbf{R})$ i tworzą sekwencję przestrzeni funkcjonalnych w postaci:

$$\{0\} \subset \dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset L^2(\mathbf{R}). \quad (1)$$

Ogólną postać B-splajnowej funkcji skalującej niecałkowitego rzędu wyraża się równaniem [1]:

$$\beta_\tau^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha+1}{k-\tau} \rho_\tau^\alpha(x-k), \quad (2)$$

gdzie $\alpha \in \mathbf{R}$ jest rzędem funkcji skalującej, $\tau \in \mathbf{R}$ jest parametrem przesunięcia, a ρ_τ^α jest funkcją w postaci:

$$\rho_\tau^\alpha(x) = -\frac{\cos \pi\tau}{2\Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha/2)} |x|^\alpha - \frac{\sin \pi\tau}{2\Gamma(\alpha+1)\cos(\pi\alpha/2)} |x|^\alpha \operatorname{sgn}(x), \quad (3)$$

gdzie $\Gamma(\alpha+1)$ jest funkcja gamma Eulera, umożliwiającą cząstkową faktoryzację. Należy zauważyć, że gdy $\alpha \in \mathbf{Z}$ oraz $\tau = (\alpha+1)/2$ z równań (2) i (3) uzyskuje się klasyczne B-splajnowe funkcje skalujące (tj. całkowitego rzędu).

Na podstawie algorytmu Mallata funkcja skalująca (2) spełnia relację dwuskalową:

$$\beta_\tau^\alpha(x) = 2^{-\alpha} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \binom{\alpha+1}{k-\tau} \beta_\tau^\alpha(2x-k). \quad (4)$$

Ogólna postać falek B-splajnowych niecałkowitego rzędu została zdefiniowana przez Unsera i Blu w [23]:

$$\psi_{\tau}^{\alpha}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^k}{2^{\alpha}} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \binom{\alpha+1}{l} \beta_0^{2\alpha+1}(l+k-1) \beta_{\tau}^{\alpha}(x-k). \quad (5)$$

B-splajnowe funkcje skalujące i falkowe niecałkowitego rzędu spełniają większość właściwości ich odpowiedników rzędu całkowitego. Jedyną właściwością, która nie jest spełniona dla potrzeb DWT jest istnienie nie zwartego nośnika tych funkcji skalujących i falek przy $\alpha \notin \mathbf{Z}$. Jednak, zaproponowany w [23] algorytm ułamkowej dyskretnej transformacji falkowej (FrDWT) jest oparty na szeregach Fouriera i pozwala ominąć ten problem.

2.2. Metoda detekcji i lokalizacji rozwarstwień

Jak wiadomo, proces transformacji falkowej może być przedstawiony jako filtracja z wykorzystaniem zestawu górno- i dolno-przepustowych filtrów. Prezentowana metoda opiera się na jednopoziomowej dekompozycji (filtracji) sygnałów przemieszczeń w postaciach własnych drgań belek z wykorzystaniem zestawu filtrów niecałkowitego rzędu. Mając na uwadze relację dwuskalową B-splajnowej funkcji skalującej niecałkowitego rzędu (4) filtr górno-przepustowy (skalujący) może być zdefiniowany poprzez jego odpowiedź impulsową w postaci [1]:

$$H_{\tau}^{\alpha}(e^{j\omega}) = 2^{-\alpha} (1 + e^{j\omega})^{\frac{1}{2}(\alpha+1)-\tau} (1 + e^{-j\omega})^{\frac{1}{2}(\alpha+1)+\tau}, \quad (6)$$

filtr dolno-przepustowy (falkowy) może być przedstawiony w podobny sposób jako:

$$G_{\tau}^{\alpha}(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} H_{\tau}^{\alpha}(-e^{-j\omega}) A^{\alpha}(-e^{j\omega}), \quad (7)$$

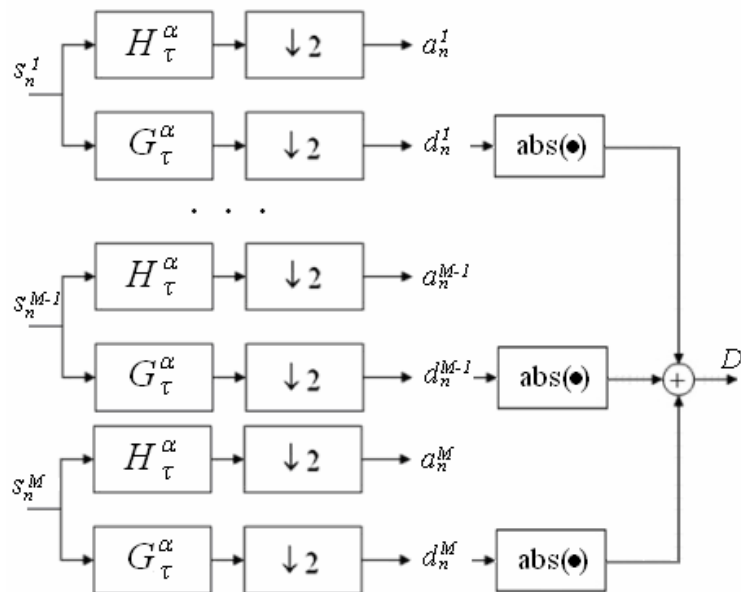
gdzie:

$$A^{\alpha}(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \beta_{\tau}^{2\alpha+1}(k) e^{-j\omega k}. \quad (8)$$

Proponowany algorytm opiera się na jednopoziomowej dekompozycji sygnału przemieszczeń w postaciach własnych drgań s_n , wykorzystując (6) i (7), a następnie procedurę zmniejszenia częstotliwości próbkowania (*ang.* downsampling). W wyniku tych operacji uzyskuje się współczynniki aproksymacji sygnału a_n oraz detalu sygnału d_n , długość realizacji obu zbiorów jest dwukrotnie mniejsza niż długość s_n ze względu na zmniejszenie częstotliwości próbkowania. Informacja o ewentualnych uszkodzeniach (nieciągłościach lub niemonotonicznościach sygnału) znajduje się w zbiorze współczynników detalu. W przypadku występowania uszkodzeń współczynniki w miejscach uszkodzeń przybierają znacznie wyższe/nizsze wartości od pozostałych współczynników znajdujących się w zbiorze.

Z wcześniejszych analiz [8-10,12] wynika, że wartości współczynników d_n silnie zależą od wartości przemieszczeń w postaciach własnych, tj. w przypadku, gdy uszkodzenie znajduje się w węzle rozpatrywanej postaci własnej nie jest możliwa jego detekcja. W celu ominięcia takiej sytuacji należy rozpatrywać więcej postaci własnych drgań w niniejszej analizie. Dodatkowo, w przypadku gdy $\alpha < 2$, współczynniki detalu zawierają trend, co jest

związanie z niepełnym odfiltrowaniem postaci własnej z sygnału. W celu poprawnej detekcji i lokalizacji rozwarstwień należy zastosować aproksymację każdego zbioru współczynników detalu dla rozpatrywanych postaci własnych. Aby zwiększyć rozpoznawalność uszkodzeń celowym jest zsumowanie wartości bezwzględnych współczynników detalu, co wyeliminuje różnice w znakach i wyeksponuje ekstrema tych współczynników w miejscach występowania uszkodzeń. Schemat metody przedstawia Rys.1.



Rys.1. Schemat metody detekcji i lokalizacji rozwarstwień

2.3. Dobór optymalnych parametrów falek

Wyniki badań uzyskane w pracy [13] pokazują, że możliwe jest wykrycie i zlokalizowanie granic rozwarstwień w oparciu o niemonotoniczności funkcji odkształceń. Jak już wspomniano powyżej, symptomem takiego uszkodzenia są ekstrema współczynników detalu pojawiające się na granicach obszarów występowania uszkodzeń. Dokładność proponowanej metody detekcji i lokalizacji rozwarstwień silnie zależy od właściwego doboru postaci B-splajnowej funkcji skalującej (2) i falkowej (5) niecałkowitego rzędu. Z tego powodu istnieje konieczność wyznaczenia optymalnych wartości parametrów tych funkcji. Zadanie optymalizacji w tym przypadku można sprowadzić do poszukiwania takich wartości parametrów α , τ , dla których wielokryterialna funkcja celu \mathbf{F} w postaci ogólnej przyjmuje wartość minimum. Zakładając, że kryteria funkcji celu nie pozostają w konflikcie między sobą zadanie optymalizacji można sformułować jako:

$$\min_{\alpha, \tau} \mathbf{F}(\alpha, \tau) = [f_1(\alpha, \tau) \quad f_2(\alpha, \tau)]^T, \quad (9)$$

gdzie $\alpha, \tau \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \alpha_c$, $1 < \tau < \tau_c$, α_c i τ_c są górnymi ograniczeniami parametrów. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że dolna wartość graniczna parametru α powinna być większa od wartości -0.5 [23]. Niemniej jednak wstępne badania wykazały [11], że zakres $-0.5 < \alpha \leq 0$ nie jest właściwy dla rozpatrywanego problemu.

Biorąc pod uwagę powyższe założenia, definiuje się pierwsze kryterium optymalizacji jako wartość proporcjonalną do odwrotności sumy wartości maksymalnych współczynników detalu:

$$f_1 = \left[1 + \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{2H} \max(D_i^k) \right]^{-1}, \quad (10)$$

gdzie H jest liczbą rozwarstwień, M jest liczbą rozpatrywanych postaci własnych, współczynniki detalu w zbiorze $D_1^k = D^k$ oraz $D_i^k = D_{i-1}^k \setminus \hat{d}_{i-1}^k, i \neq 1$ przy czym \hat{d}_{i-1}^k jest punktem w zbiorze detali D_{i-1}^k , dla którego uzyskano wartość maksymalną współczynnika detalu. Drugie z kryteriów można wyrazić w oparciu o miarę zdefiniowaną na podstawie pozostałych wartości współczynników detalu w zbiorze D^k . Kryterium to można zapisać w postaci:

$$f_2 = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{|\hat{D}^k|} d_i^k, \quad (11)$$

przy czym zachodzi relacja $\hat{D}^k = D^k \setminus \hat{d}_1^k \setminus \hat{d}_2^k \dots \setminus \hat{d}_{2H}^k$.

W przypadku ogólnym, problemy optymalizacji wielokryterialnej nie posiadają jednego globalnego rozwiązania. Uzasadnione jest więc rozpatrywanie zbioru rozwiązań, które spełniają ograniczenia i kryteria optymalizacji. W niniejszych badaniach zadanie optymalizacji wielokryterialnej rozwiązywano poszukując optimum funkcji celu w sensie Pareto. Rozwiązanie jest Pareto-optymalne, jeżeli nie istnieje inne rozwiązanie, które może poprawić co najmniej jedno z kryteriów, nie pogarszając pozostałych. Rozwiązanie takie uznawane są za niezdominowane.

Często w zastosowaniach praktycznych zadanie optymalizacji wielokryterialnej sprowadza się do zagadnienia jednowymiarowego. Również w tej pracy rozważono taki przypadek. W tym celu zastosowano skalarną funkcję celu w formie metakryterium utworzonego w oparciu o ważony iloczyn kryteriów elementarnych:

$$U = \left[1 + \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{2H} \max(D_i^k) \right]^{-w_1} \cdot \left(\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{|\hat{D}^k|} d_i^k \right)^{w_2}, \quad (12)$$

gdzie $w_{\{1,2\}} \in \langle 0,1 \rangle$ oznacza wagi poszczególnych kryteriów, których wartości określa się z zastosowaniem wiedzy eksperta lub stosując metodę przeszukiwania systematycznego.

Podczas badań wykorzystano również skalarną funkcję celu zdefiniowaną na podstawie kryterium zaproponowanego w pracy [11]:

$$U_\mu = \left[1 + \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{2H} \max(D_i^k) \right]^{-w_1} \cdot \sum_{k=1}^M \mu_{1/2}^{w_2}(\hat{D}^k), \quad (13)$$

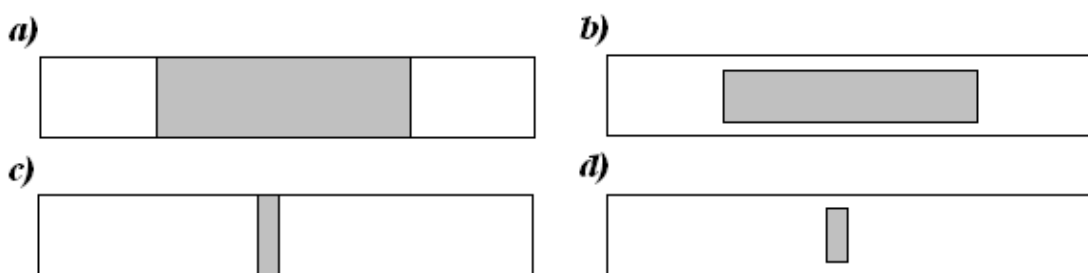
gdzie $\mu_{1/2}(\hat{D}^k)$ oznacza medianę wyznaczoną dla zbioru pozostałych współczynników detalu. Ponadto dla funkcji celu w postaci (12) wprowadzono dodatkową zmienną decyzyjną, reprezentującą informację o tym, które z postaci drgań własnych uwzględnione są podczas wyznaczenia jej wartości.

W niniejszej pracy poszukiwanie rozwiązania optymalnego (minimum funkcji celu) realizowano z zastosowaniem algorytmów ewolucyjnych [2,21]. Klasyczne metody optymalizacji (np. metody bazujące na gradiencie) nie mogą być zaadaptowane w tym

kontekście głównie ze względu na postać kryterium (10), które prowadzi do nieciągłości funkcji celu. Z tego powodu proces optymalizacji wielokryterialnej prowadzono z zastosowaniem algorytmu ewolucyjnego z sortowaniem rozwiązań niezdominowanych [2]. Natomiast w przypadku skalarnej funkcji celu zastosowano klasyczny algorytm ewolucyjny [21].

3. Procedura i wyniki detekcji i lokalizacji rozwarstwień

Analizę detekcji i lokalizacji rozwarstwień w belkach kompozytowych przeprowadzono na danych symulacyjnych uzyskanych z modeli numerycznych przygotowanych z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Rozpatrzono cztery grupy przypadków: rozwarstwienie na dużej powierzchni na długości i przez całą szerokość belki (symbol 'l'), rozwarstwienie na dużej powierzchni na długości oraz na obszarze niedochodzącym do brzegów na szerokości (symbol 'il') oraz takie same przypadki w przypadku rozwarstwień na niewielkiej powierzchni na długości (symbole 'sl' oraz 'isl'). Rozpatrywane grupy rozwarstwień zawierają po 11 przypadków: rozwarstwienie modelowano pomiędzy warstwami w 12-warstwowym laminacie. Schematy rozpatrywanych grup przedstawiono na Rys.2.



Rys.2. Rozpatrywane grupy przypadków rozwarstwień

3.1. Przygotowanie danych symulacyjnych

Modele numeryczne kompozytowych belek wspornikowych przygotowano w środowisku komercyjnym MSC Marc/Mentat. W celu poprawnego odwzorowania rozwarstwień belki zostały zamodelowane jako trójwymiarowe o wymiarach: długość $x = 200$ mm, szerokość $w = 10$ mm oraz grubość $h = 2.4$ mm. Laminat zawierał 12 ortotropowych warstw o jednakowej grubości z żywicy epoksydowej umocnionej tkaniną z włókna węglowego z następującymi właściwościami materiałowymi: moduły Younga – $E_{11} = 82$ GPa, $E_{22} = 82$ GPa, $E_{33} = 8.5$ GPa; moduły Kirchhoffa – $G_{12} = 5.2$ GPa, $G_{23} = 3.05$ GPa, $G_{31} = 3.47$ GPa oraz współczynniki Poissona – $\nu_{12} = 0.312$, $\nu_{23} = 0.29$, $\nu_{31} = 0.27$. Orientacja warstw w laminacie odpowiada wzorowi strukturalnemu: $[0/60/-60]_{2S}$. Dla modeli geometrycznych belek zdefiniowano siatkę elementów skończonych z wykorzystaniem heksagonalnych 8-węzłowych elementów z następującą liczbą w poszczególnych kierunkach: 127 elementów na długości – w celu spełnienia kryterium diadyczności FrWT (patrz [23]), 5 elementów na szerokości oraz 12 elementów na grubości. Pomiędzy warstwami zdefiniowano idealne warunki kontaktu.

Rozwarstwienia zamodelowano poprzez dezaktywację warunków kontaktu w określonych obszarach. Położenia rozwarstwień w rozpatrywanych przypadkach są następujące: dla grup 'l' oraz 'il': $x_1^0 = 85$ mm, $x_2^0 = 137$ mm, a dla grup 'sl' oraz 'isl': $x_1^0 = 95$ mm, $x_2^0 = 105$ mm. Analizę numeryczną przeprowadzono w celu określenia postaci

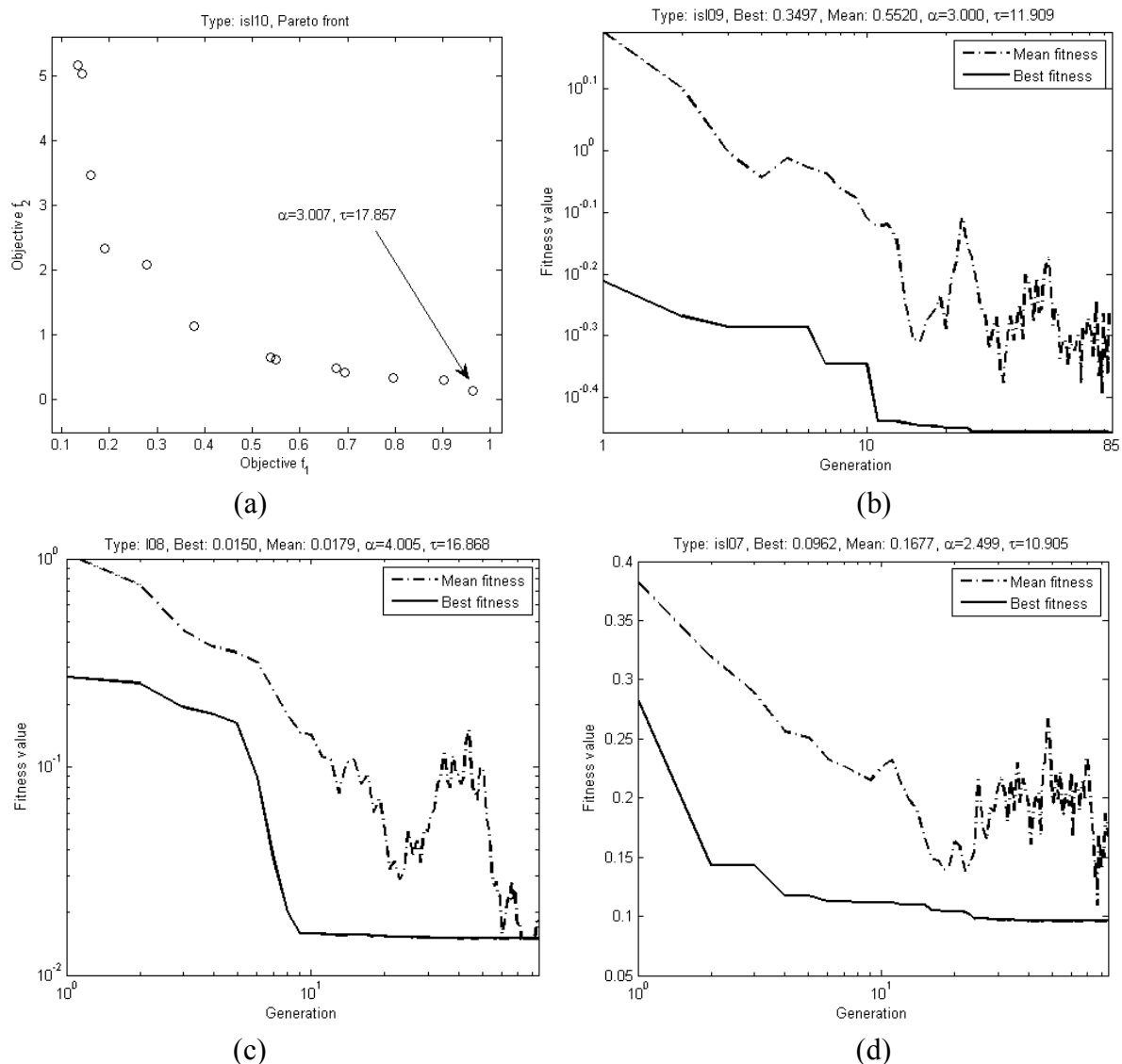
własnych drgań belek. Do dalszej analizy wybrano pięć giętych postaci własnych. Przemieszczenia w tych postaciach spróbkowano w węzłach w środku szerokości belek.

3.2. Dobór parametrów algorytmu optymalizacji

Zastosowanie algorytmu ewolucyjnego do poszukiwania optymalnych parametrów falek wiąże się z koniecznością zdefiniowania jego podstawowych cech. W niniejszych badaniach proces optymalizacji jedno- i wielokryterialnej prowadzono z zastosowaniem środowiska MATLAB[®] i pakietu Genetic Algorithm and Direct Search. Dobór parametrów algorytmu zrealizowano zgodnie z wytycznymi sugerowanymi w literaturze [21]. Funkcję przystosowania deklarowano w oparciu o kryteria (10) i (11) dla przypadku optymalizacji wielokryterialnej oraz w formie metakryterium (12) lub (13) dla przypadku jednowymiarowego. Biorąc pod uwagę wyniki uzyskane we wcześniejszych badaniach [10], ustalono górne ograniczenia zmienności parametrów falki $\alpha_c = \tau_c = 18$. Dla obu wariantów przyjęto rzeczywistoliczbowe kodowanie osobników populacji, gdzie geny w poszczególnych chromosomach reprezentowały parametry falki. Populację bazową wybierano w sposób losowy (z rozkładem równomiernym) z uwzględnieniem przyjętych ograniczeń. Zastosowano metodę rankingową do skalowania funkcji przystosowania oraz równomierną selekcję stochastyczną do wyboru rodziców tworzących nowe osobniki dla kolejnej populacji bazowej. Reprodukację uzyskiwano w wyniku zastosowania operatora sukcesji elitarniej (liczba osobników równa 2) oraz operatora krzyżowania i mutacji. Krzyżowanie realizowano z zastosowaniem metody heurystycznej, w której osobnik potomny jest tworzony jako liniowa kombinacja genów osobników rodzicielskich (mnożnik osobnika lepiej dostosowanego $\lambda = 1.2$). Przyjęto, że krzyżowanie będzie realizowane z prawdopodobieństwem p_c . Pozostałe osobniki rodzicielskie były przetwarzane za pomocą mutacji adaptacyjnej, w której zmniejszenie prawdopodobieństwa mutacji genów chromosomów zależy od tego, czy w poprzedniej epoce nastąpiła poprawa funkcji dopasowania.

W celu wyznaczenia odpowiednich wartości prawdopodobieństwa krzyżowania p_c i liczebności populacji N wykorzystano wyniki badań w zakresie zbieżności algorytmu ewolucyjnego pokazane w pracy [13]. Badania polegały na systematycznym przeszukaniu kombinacji wartości tych parametrów ($p_c = \{0.4, 0.5, \dots, 1\}$ i $N = \{5, 10, 20, 30\}$). Ostatecznie przyjęto wartości parametrów $p_c = 0.6$ i $N = 30$, dla których uzyskiwano najmniejsze uśrednione wartości funkcji przystosowania i odpowiadające im minimalne odchylenie standardowe.

Na Rys.3 przedstawiono wyniki optymalizacji prowadzonej według różnych strategii. Pierwszy przypadek (Rys.3a) pokazuje rozwiązanie optymalne w sensie Pareto. Parametry optymalne falki ($\alpha = 3.007$, $\tau = 17.857$) zostały wybrane dla przypadku, w którym uzyskano minimalną wartość szumu przy maksymalnej możliwej wartości amplitudy pików na brzegach rozwarstwienia. Rys.3b-d) przedstawiają wyniki optymalizacji jednokryterialnej przeprowadzonej dla funkcji celu: b) w postaci metakryterium (12) z wagami $w_1 = w_2 = 0.5$; c) podobnie jak poprzednio, przy czym wyłącznie dla drugiej postaci własnej; d) w postaci metakryterium (13). W dalszej części artykułu przedstawione zostaną bardziej szczegółowe rozważania dotyczące tych przypadków.



Rys.3. Przykładowe wyniki optymalizacji wielokryterialnej (a) i jednokryterialnej (b-d)

3.3. Analiza wyników lokalizacji rozwarstwień

Analizę skuteczności lokalizacji rozwarstwień przeprowadzono z wykorzystaniem algorytmu dekompozycji przedstawionego w sekcji 2.2 oraz z zastosowaniem algorytmu optymalnego doboru parametrów falek B-splajnowych niecałkowitego rzędu omówionego w sekcji 2.3. Podczas badań brano pod uwagę strategie optymalizacji wielokryterialnej wg kryteriów (10) i (11) oraz jednokryterialnej wg metakryterium (12). Ponadto przeprowadzono badania porównawcze dla metakryterium w postaci (13), które było również przedmiotem badań w pracy [11]. Uzyskano porównywalne wyniki detekcji i lokalizacji rozwarstwień dla przypadku optymalizacji jedno i wielokryterialnej. Biorąc pod uwagę duży potencjał optymalizacji jednokryterialnej w zastosowaniach praktycznych w dalszej części artykułu szczegółowo omówiono wyniki otrzymane dla tego przypadku.

Oceny wyników detekcji i lokalizacji rozwarstwień dokonywano na podstawie dwóch miar zdefiniowanych w oparciu o zależności:

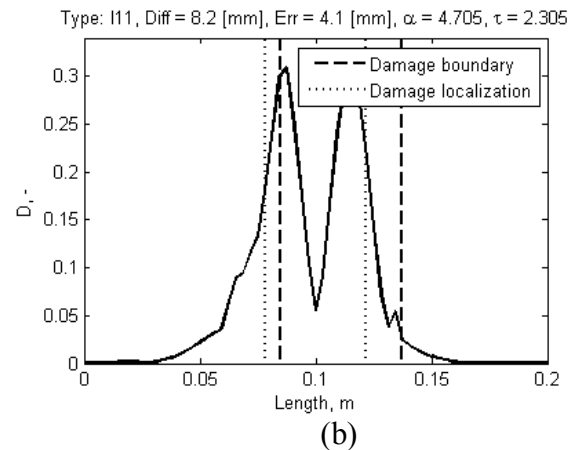
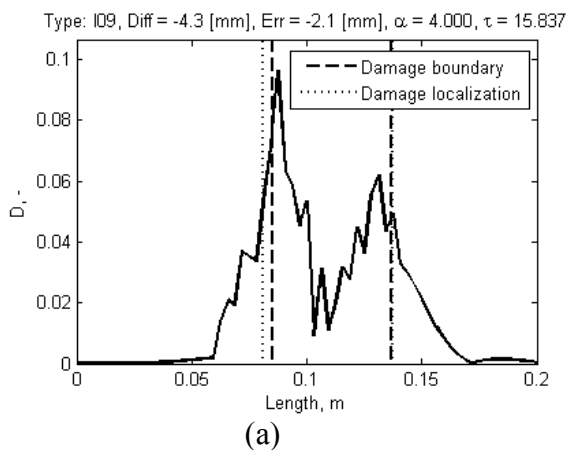
$$m_{diff} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{abs}(Diff_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{abs}[(x_2^0 - x_1^0) - (x_2^{opt} - x_1^{opt})]_i, \quad (9)$$

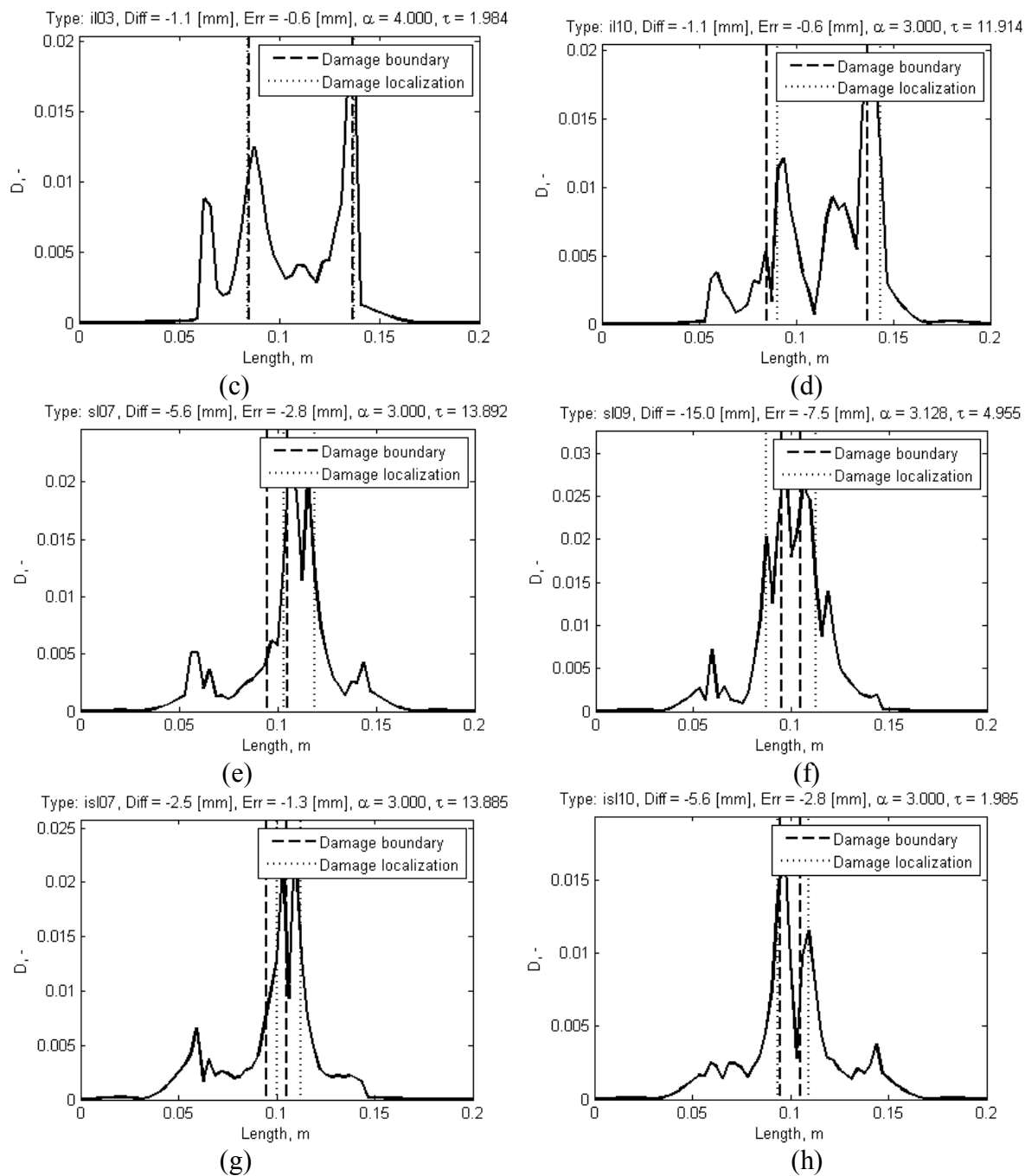
$$m_{cd} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{abs}(Err_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{abs} \left[\frac{1}{2}(x_2^0 - x_1^0) - \frac{1}{2}(x_2^{opt} - x_1^{opt}) \right]_i, \quad (10)$$

gdzie m_{diff} opisuje średnią wartość bezwzględną z różnicy rzeczywistych położenia początku i końca rozwarstwienia x_1^0 i x_2^0 oraz położenia rozwarstwienia wykrytego z zastosowaniem zaproponowanego algorytmu x_1^{opt} i x_2^{opt} ; m_{cd} opisuje w taki sam sposób średnią wartość odchylenia środka geometrycznego rozwarstwienia rzeczywistego i wykrytego. Otrzymane wyniki dla rozpatrywanych czterech grup uszkodzeń zestawiono w Tabeli 1. W tabeli przedstawiono dane dla rozmieszczeń rozwarstwień pomiędzy różnymi warstwami licząc od powierzchni dolnej belki, tj. przypadek 1 oznacza rozwarstwienie pomiędzy warstwami 1 i 2, a przypadek 2 – pomiędzy warstwami 2 i 3. W celu wizualizacji wyników z każdej grupy wybrano po dwa reprezentatywne przypadki. Pokazano je na Rys. 4.

Tabela 1. Uśrednione miary wrażliwości uzyskane podczas optymalizacji prowadzonej wg metakryterium (12) dla rozpatrywanych położenia rozwarstwień

Symbol grupy	'l'		'il'		'sl'		'isl'	
Nr przypadku	m_{diff} , mm	m_{cd} , mm	m_{diff} , mm	m_{cd} , mm	m_{diff} , mm	m_{cd} , mm	m_{diff} , mm	m_{cd} , mm
1	20.0	10.0	38.6	19.3	25.2	12.6	4.5	2.2
2	21.5	10.7	23.5	11.7	25.7	12.9	20.0	10.0
3	6.2	3.1	18.9	9.5	26.2	13.1	30.6	15.3
4	23.1	11.5	18.1	9.0	24.9	12.4	30.5	15.2
5	27.7	11.8	29.7	14.9	23.2	11.6	32.2	16.1
6	19.3	9.7	31.5	15.8	27.4	13.7	33.4	16.7
7	18.8	9.4	24.7	12.3	26.1	13.0	31.4	15.7
8	17.5	8.7	28.8	14.4	24.1	12.0	35.4	17.7
9	18.9	9.4	12.4	6.2	25.7	12.9	36.1	18.1
10	29.5	14.8	16.3	8.1	26.6	13.3	38.1	19.0
11	19.1	9.5	13.6	6.8	30.1	15.0	31.1	15.5





Rys.4. Wizualizacja lokalizacji rozwarstwień dla rozpatrywanych grup przypadków

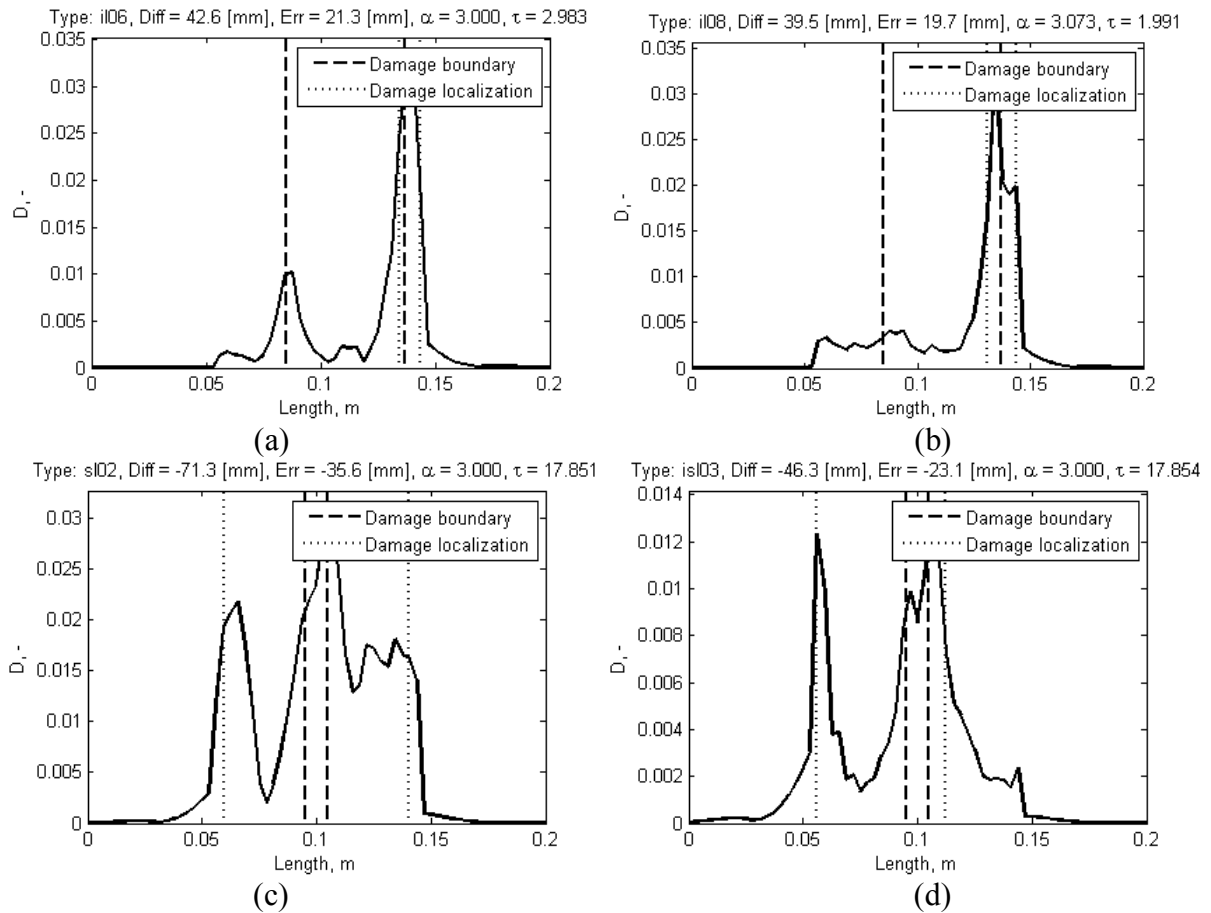
Jak można zauważyć, wyniki lokalizacji rozwarstwień przedstawione na Rys.4 w wielu przypadkach są bliskie rzeczywistym położeniom rozwarstwień. W wielu rozpatrywanych przypadkach, szczególnie w grupach 'sl' i 'isl', rząd falki jest całkowity, jednak nie zachodzi relacja pomiędzy α i τ charakterystyczna dla falek B-splajnowych rzędu całkowitego: $\tau = (\alpha + 1)/2$. Zestawienie wartości parametrów falek dla rozpatrywanych przypadków przedstawiono w Tabeli 2.

Tabela 2. Zestawienie wartości parametrów falek B-splajnowych uzyskanych po optymalizacji jednokryterialnej wg metakryterium (12)

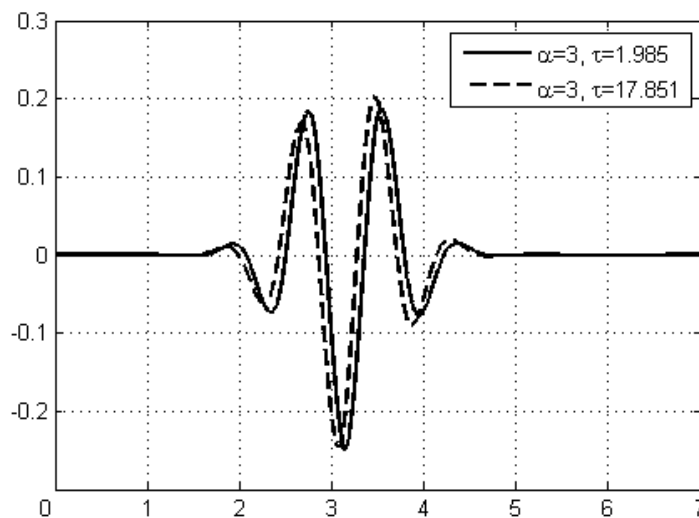
Symbol grupy Nr przypadku	'I'		'il'		'sl'		'isl'	
	$\alpha, -$	$\tau, -$	$\alpha, -$	$\tau, -$	$\alpha, -$	$\tau, -$	$\alpha, -$	$\tau, -$
1	6.345	17.704	4.000	16.871	3.000	9.918	3.000	3.965
2	6.408	17.787	5.130	14.829	3.000	17.851	3.000	14.878
3	4.863	10.907	4.000	1.984	3.000	7.940	3.000	17.854
4	4.893	5.404	2.161	14.873	3.000	11.906	3.000	15.870
5	5.461	2.472	4.293	16.855	3.000	3.965	3.000	8.924
6	3.188	15.879	3.000	2.983	3.000	17.850	3.000	15.870
7	4.962	11.781	4.647	15.867	3.000	13.892	3.000	13.885
8	5.123	9.805	3.073	1.991	3.000	1.981	3.000	9.917
9	4.000	15.837	2.000	16.921	3.128	4.955	3.000	11.909
10	4.186	2.299	3.000	11.914	3.000	15.874	3.000	1.985
11	4.705	2.305	2.000	16.920	3.000	17.857	3.000	8.930

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że optymalny rząd falek utrzymuje się w przedziale $\alpha \in [2,4]$. Potwierdzają to wyniki wcześniejszych badań przedstawione w pracy [11]. Występowanie wartości α w tym przedziale jest uzasadnione najmniejszą liczbą momentów falek oraz ich najkrótszym nośnikiem, co ma wpływ na szybszy spadek energii falek od środka ku brzegom przedziału. Pozwala to na zmniejszenie zakłóceń w pobliżu wykrytych brzegów rozwarstwień (por. np. Rys.4a i Rys.4h).

Dla niektórych rozpatrywanych przypadków rozwarstwień uzyskano niepoprawnie zlokalizowane brzegi rozwarstwień. Przykładowe wyniki przedstawiono na Rys.5. Na błędy w wykrywaniu brzegów rozwarstwień mają wpływ dwie przyczyny. Jak można zauważyć, dla przypadków przedstawionych na Rys.5a i Rys.5b wartości szczytowe dla wąskiego pasma rozwarstwienia zawierają się w przedziale $[0.12,0.145]$ długości próbki, jednak szerokość tego przedziału nie była wystarczająca, aby zdefiniować na nim oba brzegi i algorytm optymalizacyjny dążył do odnalezienia dodatkowej wartości szczytowej w celu spełnienia zadanego kryterium. W pozostałych rozpatrywanych przypadkach (Rys.5c,d) w zbiorach współczynników detalu pojawiły się wartości szczytowe przekraczające wartości współczynników detalu dla rzeczywistej lokalizacji brzegów rozwarstwień. Jest to skutkiem generowania losowej populacji bazowej w algorytmie ewolucyjnym, z czego wynika niepoprawny dobór optymalnych parametrów funkcji skalującej i falek stosowanych do problemu detekcji i lokalizacji brzegów rozwarstwienia. Należy zauważyć, że wartości τ dla tych przypadków należą do największych spośród rozpatrywanych przypadków (patrz Tab.2). Wartości te powodują utratę symetrii falek, co niekorzystnie wpływa na otrzymywane współczynniki detalu [10]. W celu zilustrowania tego zjawiska wybrano dwa skrajne przypadki spośród przedstawionych wyników: falekę, której parametry są bliskie do faleki B-splajnowej rzędu całkowitego: $\alpha = 3$, $\tau = 1.985$ (Rys.4h) (dla faleki rzędu całkowitego wartość τ byłaby równa 2) oraz falekę wykorzystaną w przypadku przedstawionym na Rys.5c: $\alpha = 3$, $\tau = 17.851$. Porównanie tych falek przedstawiono na Rys.6.



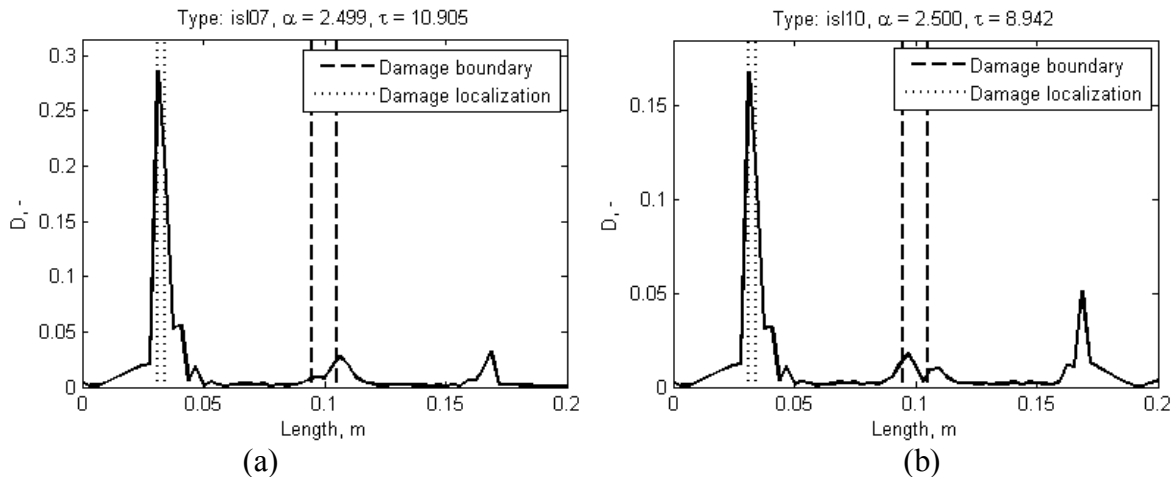
Rys.5. Przykłady niepoprawnie zlokalizowanych rozwarstwień



Rys.6. Porównanie B-splajnowych falek niecałkowitego rzędu z różnymi wartościami parametru przesunięcia

Jak wspomniano, wybór optymalizacji jednokryterialnej prowadzonej w oparciu o metakryterium (12) jest uwarunkowany uzyskaniem ilościowo oraz jakościowo lepszych wyników detekcji i lokalizacji brzegów rozwarstwień. Dodatkowo za wyborem takiego sposobu optymalizacji parametrów falek przemawia fakt większego potencjału tej metody w przyszłych zastosowaniach praktycznych w stosunku do rozwiązań opartych na optymalizacji

wielokryterialnej. W celu porównawczym przeprowadzono również próby z wykorzystaniem metakryterium (13), które było przedmiotem rozważań w pracy [11]. Podczas tego etapu badań szczególną uwagę skoncentrowano na najtrudniej wykrywalnej grupie rozwarstwień oznaczonych jako ‘isl’. Wybrano przypadki ‘isl07’ (Rys.4g) oraz ‘isl10’ (Rys.4h). Uzyskane wyniki detekcji i lokalizacji z zastosowaniem optymalizacji wg kryterium (13) zestawiono na Rys.7.



Rys.7. Wyniki lokalizacji brzegów rozwarstwień uzyskane podczas optymalizacji wg metakryterium (13)

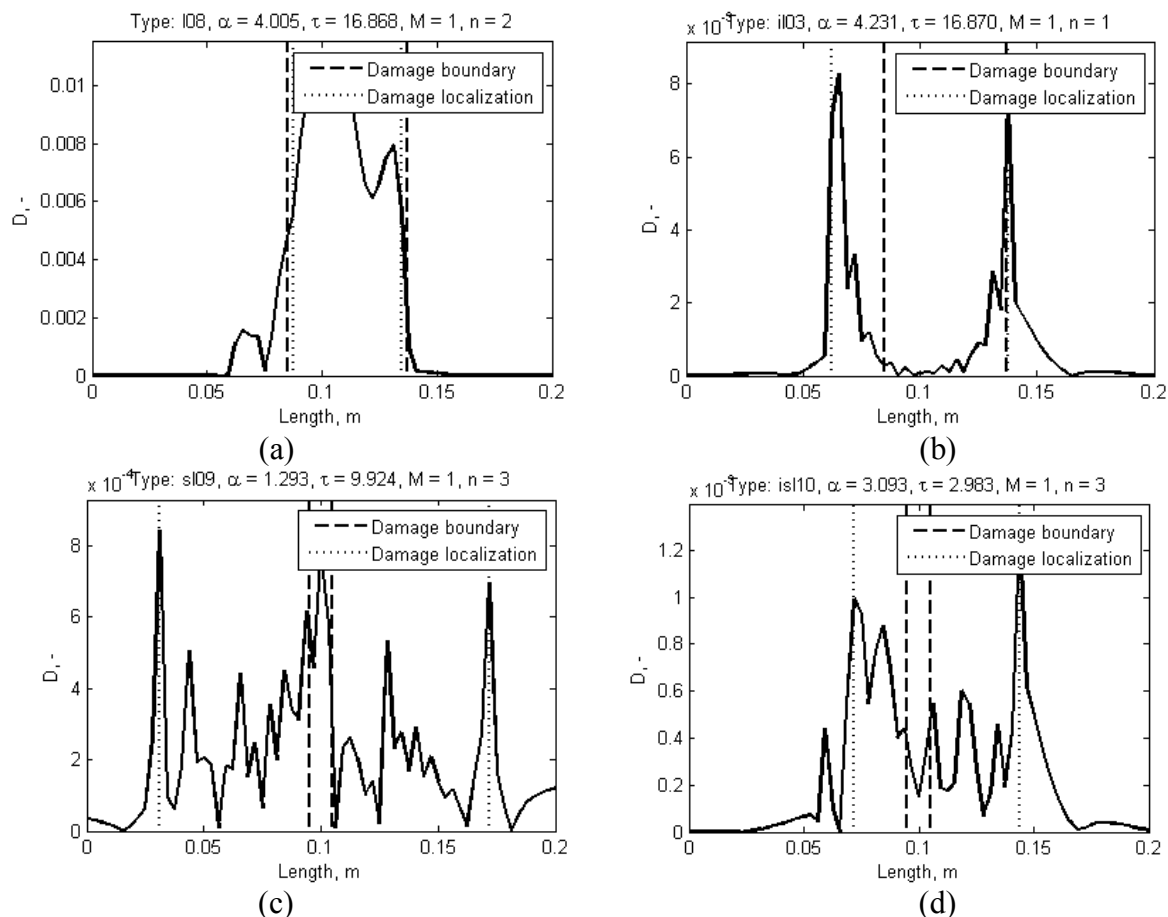
Wyniki przedstawione na Rys.7 wskazują na niedopasowanie metakryterium (13), do rozpatrywanego zagadnienia i uzasadniają wybór metakryterium (12) w przeprowadzonych analizach.

3.4. Wpływ liczby uwzględnianych postaci własnych na efektywność detekcji i lokalizacji rozwarstwień

W przedstawionym algorytmie detekcji i lokalizacji brzegów rozwarstwień uwzględniano pięć pierwszych giętych postaci drgań. Jednak wybór postaci, niosących najwięcej informacji diagnostycznej o uszkodzeniach pozwoliłby na zwiększenie wrażliwości metody na występujące uszkodzenia poprzez pominięcie postaci nie wnoszących informacji diagnostycznych o uszkodzeniach a jednocześnie będących nośnikiem szumu sumowanego do wynikowych współczynników D . Dodatkowo pozwoliłby na redukcję ilości przetwarzanych danych w przypadku uwzględniania mniejszej liczby postaci własnych, co mogłoby przyspieszyć działanie algorytmu detekcji i lokalizacji.

W celu zbadania wpływu uwzględnianych postaci własnych w analizie sformułowano zadanie optymalizacji wg metakryterium (12) z dodatkową zmienną decyzyjną, która reprezentowała liczbę i identyfikatory uwzględnianych postaci własnych. Wagi minimalizacji poziomu szumu oraz poszukiwania maksymalnych wartości współczynników detalu określono jako równe, tj. $w_1 = w_2 = 0.5$. Wyniki uzyskanych analiz dla wybranych przypadków (po jednym z każdej rozpatrywanej grupy uszkodzeń – Rys.2) przedstawiono na Rys.8.

Mimo zdefiniowanego metakryterium, zakładającego uwzględnienie wariacji ze wszystkich pięciu postaci własnych, podczas optymalizacji za każdym razem wybierana była tylko jedna z nich. Przyczyną takiego zachowania algorytmu optymalizacji są równe wartości wag kryteriów dotyczących minimalizacji szumu i poszukiwania maksymalnych wartości współczynników detalu.



Rys.8. Wyniki lokalizacji brzegów rozwarstwień z dodatkową optymalizacją liczby i numerów uwzględnianych postaci własnych

Na podstawie wyników przedstawionych na Rys.8 można zauważyć, że w przypadku rozwarstwienia z grupy 'l' i uwzględnieniu tylko drugiej postaci własnej brzegi rozwarstwienia zostały wykryte z wysoką dokładnością, natomiast dla przypadku z grupy 'il' jeden z brzegów rozwarstwienia został wykryty błędnie. W tym przypadku było to spowodowane niską wartością amplitud odkształceń w pierwszej postaci własnej wybranej przez algorytm optymalizacyjny. W pozostałych dwóch przypadkach (Rys.8c,d) rozwarstwienia zostały zlokalizowane błędnie, w każdym z przypadków wybrana była trzecia postać własna.

W celu uzyskania przypadków, w których uwzględnianych będzie kilka postaci własnych należy zmienić stosunek wag w_1 i w_2 w metakryterium (12), gdzie w_1 jest wagą odpowiedzialną za maksymalizację wartości szczytowych współczynników detalu na brzegach rozwarstwienia, a w_2 za minimalizację szumu w sygnale. Rozpatrzono dodatkowo sześć przypadków stosunków wag: $w_1 = 0.8, w_2 = 0.2$; $w_1 = 0.2, w_2 = 0.8$; $w_1 = 0.6, w_2 = 0.4$; $w_1 = 0.55, w_2 = 0.45$ oraz dwa skrajne przypadki $w_1 = 0.95, w_2 = 0.05$; $w_1 = 0.05, w_2 = 0.95$. W celu porównania wszystkich rozpatrywanych przypadków opracowano zestawienie liczby przypadków z poprawnie zlokalizowanymi brzegami rozwarstwień m oraz zakresy uwzględnianej liczby warstw M w każdej z rozpatrywanych grup (patrz Tab.3). Za przypadki z poprawnie zlokalizowanymi brzegami rozwarstwienia uznawano przypadki, w których różnica pomiędzy rzeczywistą a wykrytą lokalizacją brzegów rozwarstwień nie przekraczała 15 mm.

Tabela 3. Porównanie efektywności wykrywania rozwarstwień ze względu na optymalizację liczby uwzględnianych postaci własnych i różnych kombinacji wag w metakryterium (12)

Nr przypadku	$w_1, -$	$w_2, -$	Liczba przypadków z poprawną lokalizacją rozwarstwień oraz liczba uwzględnianych postaci własnych							
			'l'		'il'		'sl'		'isl'	
			$m, -$	$M, -$	$m, -$	$M, -$	$m, -$	$M, -$	$m, -$	$M, -$
1	0.5	0.5	5	1	4	1	0	1	2	1
2	0.8	0.2	4	1÷4	0	3÷5	0	3÷5	0	3÷5
3	0.2	0.8	7	1	1	1	0	1	2	1÷2
4	0.6	0.4	8	1	5	1÷2	2	1÷2	1	1÷2
5	0.55	0.45	8	1	6	1	2	1÷2	3	1÷2
6	0.95	0.05	2	3÷5	0	3÷5	0	3÷5	0	4÷5
7	0.05	0.95	9	1	6	1	1	1÷2	2	1÷2
Bez optymalizacji liczby uwzględnianych postaci własnych			10	5	4	5	10	5	8	5

Wyniki przeprowadzonych analiz pokazały, że waga w_2 , odpowiadająca za minimalizację szumu, ma znacznie większy wpływ na poprawne zlokalizowanie brzegów rozwarstwień. Przy tym jest brana pod uwagę mniejsza liczba postaci własnych, co jest spowodowane wprowadzeniem dodatkowych zakłóceń przy każdej kolejnej postaci własnej uwzględnianej w analizie. Dodatkowo, wyniki zestawione w Tab.3 wskazują na trudności algorytmu w wykrywaniu rozwarstwień na obszarach niedochodzących do brzegów na szerokości belki (grupy przypadków 'il' oraz 'isl'). Przyczyną błędów w lokalizacji brzegów rozwarstwień dla tych przypadków są znacznie mniejsze odkształcenia w obszarach rozwarstwień przy drganiach rezonansowych.

4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono nową metodę diagnostyki strukturalnej belek kompozytowych zorientowaną na wykrywanie i lokalizację brzegów rozwarstwień. Rozwarstwienia stanowią jeden z najtrudniejszych do wykrycia typów uszkodzeń przy zastosowaniu metod opartych o analizę modalną. Wyniki pracy wskazują na potencjał metody w wykrywaniu takich uszkodzeń dzięki zastosowaniu algorytmów ewolucyjnych do jedno- i wielokryterialnej optymalizacji parametrów falek B-splajnowych niecałkowitego rzędu. Badania wykazały, że metoda cechuje się wysoką efektywnością w wykrywaniu i lokalizacji rozwarstwień znajdujących się na obszarach dochodzących do brzegów na szerokości. W przypadku wewnętrznych rozwarstwień metoda cechuje się mniejszą skutecznością, a rozpoznawalność rozwarstwień sięga w tym przypadku ok. 50%. Zaobserwowano, że rząd falek w rozpatrywanych przypadkach był stosunkowo niski i zazwyczaj zawierał się w przedziale $\alpha \in [2,4]$. Świadczy to o wyborze przez algorytm optymalizacyjny falek o krótkich zwartych nośnikach, które w konsekwencji generują mniejszy szum przy zastosowaniu transformacji falkowej. Ponadto, najlepsze wyniki uzyskiwano dla takich przypadków, przy których wartość parametru przesunięcia τ była dobierana przez algorytm optymalizacyjny w taki sposób, że falka dążyła do symetrii względem środka zwartego nośnika.

Rozbieżności pomiędzy grupami uszkodzeń w lokalizacji rozwarstwień przedstawione w pracy mogą być zredukowane poprzez opracowanie odrębnych kryteriów optymalizacyjnych dla różnych postaci geometrycznych rozwarstwień, co jest planowane w dalszych pracach. Ponadto, zwiększenie dokładności przy wykrywaniu uszkodzeń z

wykorzystaniem zaproponowanego algorytmu może być uzyskane dzięki utworzeniu populacji bazowej z przypadków poprawnie wykrytych uszkodzeń uzyskanych w analizach (patrz Tab.2). Po przeprowadzeniu analiz na danych symulacyjnych planuje się weryfikację eksperymentalną metody.

Podziękowania: Projekt badawczy finansowany przez Narodowe Centrum Nauki na podstawie decyzji nr DEC-2011/03/N/ST8/06205.

Bibliografia

1. Blu T., Unser M. A complete family of scaling functions: the (α, τ) -fractional splines. Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing 2003; 6: 421-424.
2. Deb K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. Wiley, 2009.
3. Douka E., Loutridis S., Trochidis A. Crack identification in beams using wavelet analysis. International Journal of Solids and Structures 2003; 40: 3557-3569.
4. Dumont, J., Hernandez, A., Carrault, G. Improving ECG beats delineation with an evolutionary optimization process. IEEE Transactions on Biomedical Engineering 2010; 57(3): 607-615.
5. Ghribi S.F., Jammoussi A.Y., Masmoudi D.S. A multi objective genetic algorithm based optimization of wavelet transform implementation for face recognition applications. World Academy of Science, Engineering & Technology 2011; 56: 1590-1593.
6. Ghribi S.F., Masmoudi D.S., Derbel, N. A multi objective genetic algorithm based optimization of wavelet transform implementation. Proc. of 3rd International Design and Test Workshop, Monastir 2008; 87-91.
7. Hein H., Feklistova L. Computationally efficient delamination detection in composite beams using Haar wavelets. Mechanical Systems and Signal Processing 2011; 25: 2257-2270.
8. Katunin A. Identification of multiple cracks in composite beams using discrete wavelet transform. Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance 2010; 45: 41-52.
9. Katunin A. The construction of high-order B-spline wavelets and their decomposition relations for fault detection and localisation in composite beams. Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance 2011; 46: 43-59.
10. Katunin A. Damage identification in composite plates using two-dimensional B-spline wavelets. Mechanical Systems and Signal Processing 2011; 25: 3153-3167.
11. Katunin A. Crack identification in composite beam using causal B-spline wavelets of fractional order. Modelowanie Inżynierskie 2013; 15: 57-63.
12. Katunin A., Holewik F. Crack identification in composite elements with non-linear geometry using spatial wavelet transform. Archives of Civil and Mechanical Engineering 2013; 13: 287-296.
13. Katunin A., Przystałka P. Structural diagnostics of composite beams using optimally selected fractional B-spline wavelets. Intelligent Systems in Technical and Medical Diagnostics, Korbicz J., Kowal M., Eds., Advances in Intelligent Systems and Computing 2014; 230: 475-486.
14. Loutridis S., Douka E., Trochidis A. Crack identification in double-cracked beams using wavelet analysis. Journal of Sound and Vibration 2004; 277: 1025-1039.

15. Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 1989; 11: 674-693.
16. Pai P.F., Young L.G. Damage detection of beams using operational deflection shapes. *International Journal of Solids and Structures* 2001; 38: 3161-3192.
17. Rafiee, J., Tse, P.W., Harifi, A., Sadeghi, M.H. A novel technique for selecting mother wavelet function using an intelligent fault diagnosis system. *Expert Systems with Applications* 2009; 36: 4862-4875.
18. Ratcliffe C.P., Bagaria W.J. Vibration technique for locating delamination in a composite beam. *American Institute for Aeronautics and Astronautics Journal* 1998; 36: 1074-1077.
19. Rucka M., Wilde K. Application of continuous wavelet transform in vibration based damage detection method for beams and plates. *Journal of Sound and Vibration* 2005; 27: 1327-1338.
20. Rucka M., Wilde K. Crack identification using wavelets on experimental static deflection profiles. *Engineering Structures* 2006; 28: 279-288.
21. Rutkowski L. *Methods and techniques of artificial intelligence (in Polish)*. PWN, Warsaw, 2005.
22. Unser M., Aldroubi A., Eden M. On the asymptotic convergence of B-spline wavelets to Gabor functions. *IEEE Transactions on Information Theory* 1992; 38: 864-872.
23. Unser M., Blu T., Fractional splines and wavelets. *SIAM Review* 2000; 42: 43-67.
24. Zhong S., Oyadiji S.O. Detection of cracks in simply-supported beams by continuous wavelet transform of reconstructed modal data. *Computers and Structures* 2011; 89: 127-148.
25. Zou Y., Tong L., Steven G.P. Vibration based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures – a review. *Journal of Sound and Vibration* 2000; 230: 357-378.